Свердлов С. З. к.т.н., Усов Л. В. к.э.н., доцент

Вологодский Политехнический Институт

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНФЛЮЕНТНОГО АНАЛИЗА

Рукопись депонирована в ВИНИТИ 6.08.85 г. 5851-85 ДЕП

Содержание

1. Формулировка задачи детерминированного инфлюентного анализа

В данной работе рассматривается задача инфлюентного (факторного) анализа, формулируемая следующим образом [1]: по заданной зависимости

$$Y = f(X) = f(X_1, X_2, ..., X_n) \quad (1)$$

показателя Y от факторов $X_1, X_2, ..., X_n$, а также при известных начальных a_i и конечных b_i значениях факторов X_i при $i = \overline{1,n}$ определить величины $A^f_{X_i}$, являющиеся оценками влияния приращения $\delta_i = b_i - a_i$ фактора X_i на приращение

$$\Delta Y = \Delta f = f(b) - f(a) \quad (2)$$

результирующего показателя.

При этом величины $A^f_{X_i}$ (в дальнейшем для краткости A_i), называемые инфлюентами, должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Delta f \quad (3)$$

Следует подчеркнуть, что при рассмотрении сформулированной задачи факторы считаются равноправными в том смысле, что характер и степень их влияния на результирующий показатель целиком определяются зависимостью (1), начальными и конечными значениями.

Любое деление факторов на количественные, качественные и т.п., не отраженное в зависимости (1) не принимается во внимание. Если это не оговорено особо, факторы считаются независимыми.

Рассматриваемые в работе методы решения задачи инфлюентного анализа формулируются алгоритмически и ориентированы на применение ЭВМ. Сравнение методов проводится применительно к случаю достаточно большого количества факторов.

2. Инфлюентный анализ мультипликативных зависимостей

Рассматривается зависимость вида

$$Y = f(X) = X_1 X_2 ... X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i \quad (4)$$

Ниже рассмотрены методы, специально ориентированные на анализ зависимостей вида (4), Общие методы, которые могут быть применены к мультипликативным функциям, обсуждаются в разделе 3.

2.1. Обзор существующих методов

2.1.1. Логарифмический метод

Метод основан на логарифмировании зависимости (4) и представлении приращения показателя в виде

$$\Delta Y = \Delta f = \frac{\Delta f}{\lg|f(b)| - \lg|f(a)|} \sum_{i=1}^{n} (\lg|b_i| - \lg|a_i|) \quad (5)$$

Для расчета инфлюент, используются формулы

$$A_i = k \cdot \Delta \lg|X_i| \quad (X_i = \overline{1,n}) \quad (6)$$

где $k = \begin{cases} f(a), & если \quad \Delta f = 0 \\ \dfrac{f(b) - f(a)}{\lg|f(b)| - \lg|f(a)|}, & если \quad \Delta f \neq 0 \end{cases}$

Важнейшим достоинством логарифмического метода является простота его вычислительного алгоритма, сводящегося к применению формул (6) к каждому фактору, причем коэффициент k приходится вычислять лишь однажды. Расчеты при этом могут выполняться с использованием простейших вычислительных средств.

Метод может быть применен также к зависимостям более общего вида, когда

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i} \qquad (7)$$

где α_i $(i = \overline{1,n})$ – заданные параметры.

Вместе с тем логарифмический метод, на наш взгляд, не имеет достаточно четкого обоснования. Деление приращения показателя происходит пропорционально приращениям логарифмов факторов.

2.1.2. Метод деления нераспределенных остатков поровну

Для рассмотрения данного метода анализа представим приращение мультипликативного показателя в виде

$$\Delta f = f(b) - f(a) = f(a + \delta) - f(a) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + \delta_i) - \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad (8)$$

Выполняя умножения в (8), получаем

$$\Delta f = \delta_1 a_2 a_3 ... a_n + a_1 \delta_2 a_3 ... a_n + ... + a_1 a_2 ... a_{n-1} \delta_n + \delta_1 \delta_2 a_3 ... a_n + ... + \delta_1 \delta_2 ... \delta_n \qquad (9)$$

Выражение в правой части (9) содержит $2^n - 1$ слагаемых. В соответствии с рассматриваемым методом каждое из этих слагаемых должно быть разделено равными долями между теми факторами, приращения которых (δ_i), входят в это слагаемое сомножителями. Так первое слагаемое $\delta_1 a_2 a_3 ... a_n$ целиком относится к первому фактору и является составляющей инфлюенты A_1, слагаемое $\delta_1 \delta_2 a_3 ... a_n$ делится поровну между факторами 1 и 2 и т.д.

Метод деления поровну достаточно аргументировано обоснован [2], а для случая 2 и 3 факторов может быть наглядно интерпретирован геометрически.

2.1.3. Метод обратных колец

Метод, предложенный Н.Е.Гончаровым [2], представляет собой развитие метода цепных подстановок. В качестве инфлюент при этом принимаются величины, полученные осреднением значений вычисляемых методом цепных подстановок при рассмотрении части из $n!$ возможных подстановок. Принимаемые для расчета подстановки формируются путем кольцевой перестановки прямой и обратной последовательности факторов. При этом число рассматриваемых подстановок оказывается равным $2n$.

По утверждению автора данного метода такой выбор рассматриваемых подстановок дает значения инфлюент близкие к абсолютным средним значениям, получаемым при рассмотрении всех $n!$ подстановок.

Для $n \leq 7$ в [2] приводятся расчетные формулы.

2.2. Методы неопределенных множителей

Рассмотрим часть приращения (8), пропорциональную приращению δ_i i-ого фактора

$$D_i = \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (a_j + \delta_j) \qquad (10)$$

Нетрудно убедиться, что величина D_i, представляющая собой приращение показателя Y, обусловленное изменением i-ого фактора совместно со всеми другими факторами, может быть представлена в виде

$$D_i = \delta_i (\Delta_0^{(i)} + \Delta_1^{(i)} + \ldots + \Delta_l^{(i)} + \ldots + \Delta_{n-1}^{(i)}) \qquad (11)$$

где $\begin{matrix} \Delta_0^{(i)} = a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n \\ \Delta_{n-1}^{(i)} = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{i-1} \delta_{i+1} \ldots \delta_n \end{matrix}$

а $\Delta_l^{(i)}$ ($0 < l < n-1$) — сумма слагаемых вида $\delta_{i1}\delta_{i2}\ldots\delta_{il}a_{il+1}\ldots a_{in-1}$ ($i_1 \neq i_2 \neq i_m \neq i_{n-1} \neq i$), содержащих в качестве сомножителей приращения l факторов.

Рассмотренный выше метод деления нераспределенных остатков поровну предполагает отношение к инфлюенте i-ого фактора $\frac{1}{l+1}$-й части величины δ_i $\Delta_l^{(i)}$,т.е. инфлюенты в этом случае вычисляются так:

$$A_i = \delta_i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\Delta_l^{(i)}}{l+1} \qquad (12)$$

При большом количестве факторов n непосредственное определение величин $\Delta_l^{(i)}$ путем группировки соответствующих слагаемых весьма сложно. Инфлюенты A_i удобнее вычислять, используя разложение (9). Однако и в этом случае для вычисления инфлюент требуется выполнить не менее чем $n2^n - 1$ арифметических операций.

В связи с этим предлагается вместо (12) использовать соотношение

$$A_i = \delta_i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\Delta_l^{(i)}}{k^l} \qquad (13)$$

где $k > 1$ - постоянный коэффициент.

При переходе от (12) к (13) происходит замена последовательности

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{l+1}; \ldots; \frac{1}{n} \qquad (14)$$

последовательностью

$$1; \frac{1}{k}; \frac{1}{k^2}; \ldots; \frac{1}{k^l}; \ldots; \frac{1}{k^{n-1}} \qquad (15)$$

При $k > 1$ члены последовательности (15) как и элементы (14) убывают с ростом l, и (15) при соответствующем выборе k может рассматриваться как приближение (14), а формулу (13) следует рассматривать как приближенную для метода деления нераспределенных остатков поровну.

Преимущество же формулы (13) по сравнению с (12) состоит в том, что значения A_i в соответствии с (13) могут быть легко получены из формулы (10) для D_i при подстановке в нее вместо δ_j значений $\frac{\delta_j}{k}$:

$$A_i = \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (a_j + \frac{\delta_j}{k}) \qquad (16)$$

Действительно, поскольку величины $\Delta_l^{(i)}$, входящие в разложение (11) для D_i, представляют собой суммы слагаемых, каждое из которых содержит l штук сомножителей δ_{jm}, то при замене δ_j на $\frac{\delta_j}{k}$ каждая величина $\Delta_l^{(i)}$ будет разделена на k^l.

Значение коэффициента k, входящего в (16) должно быть выбрано таким, чтобы выполнялось условие (3), требующие равенства суммы инфлюент приращению показателя.

Подставляя выражения (16) для A_i в (3), получаем уравнение для определения k:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (a_j + \frac{\delta_j}{k}) = \Delta f \qquad (17)$$

При использовании ЭВМ для вычисления корня уравнения (17) целесообразно заменить деление умножением, решая (17) относительно множителя $S = \frac{1}{k}$, $S \in [0,1]$. Сделав такую замену переменной, получим уравнение ($n-1$)-й степени для определения S:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (a_j + S\delta_j) - \Delta f = 0 \qquad (18)$$

Оценим количество арифметических операций, которые необходимо выполнить для вычисления инфлюент предлагаемым методом. При заданных δ_j и a_j ($j = \overline{1,n}$) и определенной заранее величине Δf для однократного вычисления левой части уравнения (18) при некотором S требуется выполнить $(n-1)^2 + 1$ операций типа сложения и $n(n-1)$ умножений, т.е. всего $\approx 2n^2$ действий. При отыскании корня одним из численных методов левая часть уравнения вычисляется многократно. Так при использовании простейшего метода половинного деления число итераций, необходимых для нахождения S на отрезке [0,1] с точностью - 0,001 составляет 10. Данная точность, видимо, может считаться достаточной для большинства случаев, а использование более совершенных методов поиска корней позволяет сократить число итераций. Поэтому в качестве оценки необходимого количества операций для данного метода примем величину $20n^2$. Нужно заметить, что дополнительных действий для вычисления инфлюент по формуле (16) выполнять не требуется т.к. инфлюенты, являющиеся слагаемыми левой части уравнения (18), определяются в ходе его решения. Для сравнения трудоемкости предлагаемого метода неопределенного множителя и метода деления поровну приводится в табл.1

n	5	6	7	8	10	20
$n2^n$	160	384	896	2048	10240	$2 \cdot 10^7$
$20n^2$	500	720	980	1280	2000	8000

Из таблицы 1 следует, что при количестве факторов >7 метод неопределенного множителя дает существенный выигрыш.

2.2.1. Примеры применения метода неопределенного множителя

1) Два фактора (n =2).

Для этого случая расчет выполняем в общем виде.

Запишем формулу для инфлюент:

$$A_i = \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (a_j + S\delta_j) \qquad (19)$$

.

При n =2 из (19) получаем:

$A_1 = \delta_1(a_2 + S\delta_2) = \delta_1 a_2 + S\delta_1\delta_2$

$A_2 = \delta_2(a_1 + S\delta_1) = \delta_2 a_1 + S\delta_1\delta_2$

Приращение показателя:

$\Delta f = (a_1 + \delta_1)(a_2 + \delta_2) - a_1 a_2 = \delta_1 a_2 + \delta_2 a_1 + \delta_1\delta_2$

Уравнение для определения множителя S имеет вид

$A_1 + A_2 = \Delta f$

Подставляя в него выражение для A_1, A_2 и Δf, получаем

$\delta_1 a_2 + 2S\delta_1\delta_2 + \delta_2 a_1 = \delta_1 a_2 + \delta_2 a_1 + \delta_1\delta_2$

После приведения подобных членов имеем

$2S\delta_1\delta_2 = \delta_1\delta_2$ откуда $S = \frac{1}{2}$

Подставляя полученное значение S в формулы для инфлюент, получим

$A_1 = \delta_1(a_2 + \frac{\delta_2}{2})$

$A_2 = \delta_2(a_1 + \frac{\delta_1}{2})$

Таким образом, оказывается, что при n =2 метод неопределенного множителя дает тот же результат, что и метод деления остатков поровну.

2) При n =3 расчет выполним для

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$

$b_1=2$ $b_2=3$ $b_3=4$

$\delta_1 = b_1 - a_1 = 1$

$\delta_2 = b_2 - a_2 = 2$

$\delta_3 = b_3 - a_3 = 3$

$A_1 = \delta_1(a_2 + S\delta_2)(a_3 + S\delta_3) = (1+2S)(1+3S) = 6S^2 + 5S + 1$

$A_1 = \delta_2(a_1 + S\delta_1)(a_3 + S\delta_3) = 2(1+S)(1+3S) = 6S^2 + 8S + 2$

$A_1 = \delta_3(a_1 + S\delta_1)(a_2 + S\delta_2) = 3(1+S)(1+2S) = 6S^2 + 9S + 3$

$\Delta f = b_1 b_2 b_3 - a_1 a_2 a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 23$

Уравнение для определения S имеет вид

$18S^2 + 22S + 6 = 23$

или

$18S^2 + 22S - 17 = 0$

Корни этого уравнения равны $S_1 \approx$-1,76; $S_2 \approx$0,542.

Принимая S=S_2=0,542, получаем значения инфлюент

A_1=5,39; A_2=8,03; A_3=9,58

В соответствии с методом деления поровну для этого примера получается

A_1=5,5; A_2=8; A_3=10,5

2.2.2. Метод сопряженных множителей

Использование в рассмотренном выше методе одного неопределенного множителя S позволяло обеспечить лишь выполнения условия (3).

Введем в рассмотрение второй множитель, который обозначим q. Подставим в (10) вместо a_j величину qa_j , а вместо δ_j как и прежде $S\delta_j$.

Получим

$$D_i = \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (q a_j + S\delta_j) \tag{20}$$

$$(i = \overline{1,n})$$

Величины D_i при соответствующем выборе S и q могут быть приняты за инфлюенты, т.к. при разложении произведения из правой части (20) в сумму и группировке слагаемых, содержащих одинаковое количество (l) сомножителей δ_{jm} получается

$$A_i = \delta_i \sum_{l=0}^{n-1} S^l q^{n-1-l} \Delta_l^{(i)} \tag{21}$$

Формула (21) может рассматриваться как приближенная по отношению к формуле (12), дающей значения инфлюент по методу деления остатка поровну.

Наличие же в нашем распоряжении двух неопределенных множителей позволяет наряду с условием (3) удовлетворить дополнительному условию. В качестве такого условия примем требование наилучшего приближения последовательности.

$$\{P(l)\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{l+1}, ..., \frac{1}{n}$$

последовательностью

$$\{P_1(l)\} = q^{n-1}, Sq^{n-2}, ..., S^l q^{n-1-l}, ..., S^{n-1}$$

Это условие запишем в следующей форме

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left[\ln P(l) - \ln P_1(l, S, q) \right]^2 = \min \tag{22}$$

Подставляя в (22) выражение для $P_1(l,S,q)$ и выполняя логарифмирование, получим:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left[\ln P(l) - l \cdot \ln S - (n-1-l) \cdot \ln q \right]^2 = \min \tag{23}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} P^* &= \ln P(l) = -\ln(l+1) \\ S^* &= \ln S \\ q^* &= \ln q \end{aligned} \tag{24}$$

Теперь (23) будет выглядеть так

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left[P^* - l \cdot S^* - (n-1-l) \cdot q^* \right]^2 = \min \tag{25}$$

Для нахождения соотношения между q^* и S^*, обеспечивающего минимум левой части (26), продифференцируем (24) по q^* и приравняем производную нулю.

$$2\sum_{l=0}^{n-1} \left[P^* - l \cdot S^* - (n-1-l) \cdot q^* \right] (n-1-l) = 0 \tag{26}$$

Из полученного уравнения находим

$$q^* = \frac{\sum_{l=0}^{n-1} P^*(n-1-l) - S^* \sum_{l=0}^{n-1} l(n-1-l)}{\sum_{l=0}^{n-1} (n-1-l)^2} \tag{27}$$

Учитывая (24), из (27) получаем

$$q = cS^R, \tag{28}$$

где

$$c = \exp\left[-\frac{\sum_{l=1}^{n-2} \ln(l+1)\cdot(n-1-l)}{\sum_{l=0}^{n-2}(n-1-l)^2} \right]$$

$$R = -\frac{\sum_{l=1}^{n-2} l(n-1-l)}{\sum_{l=0}^{n-2}(n-1-l)^2} \qquad (29)$$

Коэффициенты c и R, входящие в уравнение (28), связывающее S и q, как видно из (29) зависят только от n, что позволяет при заданном n вычислять их лишь однажды.

Таким образом, последовательность вычислений при использовании рассматриваемого метода оказывается следующей:

1. Вычисляются по формулам (29) значения c и R.
2. Вычисляется корень $\overline{S}$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} (cS^R a_j + S\delta_j) = \Delta f$$

$$\overline{S} \in [0,1] \qquad (30)$$

За инфлюенты принимаются величины, являющиеся слагаемыми левой части (30) при $S = \overline{S}$:

$$A_i = \delta_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} (c\overline{S}^R a_j + \overline{S}\delta_j) \qquad (31)$$

Заметим, что при использовании данного метода количество арифметических действий, которые необходимо выполнить увеличивается примерно вдвое по сравнению с методом неопределенного множителя рассмотренного в разделе 2.2.1. Однако и в этом случае зависимость числа необходимых действий от количества факторов остается квадратичной, что при больших n (больше 8) дает выигрыш по сравнению с методом деления нераспределенных остатков поровну.

2.3. Метод решающей матрицы

Рассматриваемый ниже метод, названный методом решающей матрицы, позволяет получить решение задачи инфлюентного анализа для мультипликативного показателя, совпадающее с решением, получаемым при делении нераспределенных остатков поровну между факторами, но требует (при больших n) меньшего количества вычислений.

Рассмотрим соотношение

$$H_i = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_l^{(i)} S^l$$

$$(i = \overline{1,n}) \qquad (32)$$

Правая часть (32), как показано выше, может быть легко вычислена по формуле

$$H_i = \prod_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} (a_j + S\delta_j) \qquad (33)$$

Введем в рассмотрение последовательность значений множителя S

$$
\begin{aligned}
&S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n \\
&S_k \in [0,1] \\
&S_r \neq S_m \quad при \quad r \neq m \\
&r, k, m = \overline{1, n}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Подставляя поочередно значения элементов этой последовательности в (33) вычислим n величин $H_{i,k}(i, k = \overline{1,n})$. Приравняв значения $H_{i,k}$ правым частям (32) $(при \quad S = S_k)$ запишем

$$
\begin{aligned}
&S_1^0 \Delta_0^{(i)} + S_1 \Delta_1^{(i)} + \ldots + S_1^{n-1} \Delta_{n-1}^{(i)} = H_{i,1} \\
&S_2^0 \Delta_0^{(i)} + S_2 \Delta_1^{(i)} + \ldots + S_2^{n-1} \Delta_{n-1}^{(i)} = H_{i,2} \\
&\ldots. \\
&S_n^0 \Delta_0^{(i)} + S_n \Delta_1^{(i)} + \ldots + S_n^{n-1} \Delta_{n-1}^{(i)} = H_{i,n}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Решая полученную систему n линейных алгебраических уравнений можно определить n значений

$$\Delta_0^{(i)}, \Delta_1^{(i)}, \ldots, \Delta_{n-1}^{(i)},$$

которые используются для вычисления инфлюент по формуле (12)

$$A_i = \delta_i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\Delta_l^{(i)}}{l+1}.$$

Для вычисления инфлюент всех факторов систему уравнений (35) необходимо решать для n вариантов правых частей $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Заметим, что определитель системы (35) есть определитель Вандермонда,

$$
\begin{vmatrix}
1 & S_1 & S_1^2 & \ldots S_1^{n-1} \\
1 & S_2 & S_2^2 & \ldots S_2^{n-1} \\
. & . & . & \ldots \; . \\
1 & S_n & S_n^2 & \ldots S_n^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

который не равен нулю при

$$S_r \neq S_m \qquad \left(r, m = \overline{1,n}\right)$$
$$r \neq m$$

Следовательно решение (35) всегда существует и единственно. При решении системы уравнений (35) можно использовать метод исключения Гаусса [3]. Причем при решении системы с различными правыми частями приведение матрицы коэффициентов левой части к треугольному виду (прямой ход метода Гаусса) необходимо выполнить лишь однажды. Более того, поскольку выбор значений S_1, S_2,…, S_n не зависит от других параметров задачи, то положив, например (для $n \leq 20$)

S_1=1, S_2=0,95, S_3=0,9, S_4=0,85 приведение матрицы к треугольному виду (получение решающей матрицы) можно произвести заранее.

Общее количество арифметических действий, которые необходимо выполнить при решении системы n уравнений с n вариантами правых частей составляет $2n^3$ [3]. Кроме того, для вычисления правых частей по формуле (33) необходимо произвести примерно $3n^3$ операций. n^2 действий нужно для определения инфлюент по формуле (12). Таким образом, использование метода решающей матрицы требует выполнения примерно $5n^3$ действий, что при $n = 20$ составляет 40000. (Для сравнения см. табл. I).

По сравнению с рассмотренными выше методами неопределенных множителей метод решающей матрицы позволяет определить не только значения самих инфлюент A_i, но и их составляющих $\Delta_l^{(i)}\delta_i$, отражающие влияние на приращение показателя *i*-го фактора совместно с *l* другими факторами $(l=\overline{0,n-1})$.

3. Инфлюентный анализ зависимостей произвольного вида

Данный раздел посвящен рассмотрению методов, применяемых для решения задачи инфлюентного анализа, сформулированной выше (см. раздел 1), в случае, когда зависимость $f(X)$ показателя от факторов произвольна. При этом, однако, предполагается, что функция $f(X)$ удовлетворяет условиям, выполнение которых необходимо для применения того или иного метода (непрерывность, дифференцируемость и т.д.). Заметим также, что $f(X)$ может быть задана не только аналитически, но и алгоритмически.

3.1. Обзор существующих методов

Одним из наиболее распространенных и простых методов, пригодных для инфлюентного анализа произвольных зависимостей является метод цепных подстановок, который основывается на представлении разложения приращения показателя в виде

$$\begin{aligned}
&\Delta f = f(b)-f(a) = f(b)-f(a_1,b_2,b_3,...,b_n)+\\
&+f(a_1,b_2,b_3,...,b_n)-f(a_1,a_2,b_3,...,b_n)+...+\\
&+f(a_1,a_2,...,a_{i-1},b_i,...,b_n)-f(a_1,a_2,...,a_i,b_{i+1},...,b_n)+...+\\
&+f(a_1,a_2,...,a_{n-1},b_n)-f(a)
\end{aligned}$$

За величины инфлюент при этом принимаются

$$A_i = f(...,a_{i-1},b_i,...)-f(...,a_i,b_{i+1},...)$$

Очевидно, что при таком подходе значения инфлюент будут зависеть от порядка нумерации факторов, а различных вариантов нумерации (подстановок) существует $n!$ Обоснованного же и общепризнанного способа выбора конкретной подстановки в практике инфлюентного анализа не существует.

Метод цепных подстановок является частным случаем интегрального метода инфлюентного анализа [4], при использовании которого инфлюенты определяются путем вычисления криволинейного интеграла по отрезку Γ кривой, соединяющей точки $X=a$ и $X=b$ в пространстве факторов:

$$A_i = \int_\Gamma \frac{\partial f(X)}{\partial X_i} dX_i\,, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{36}$$

Обычно в качестве линии интегрирования выбирается отрезок прямой, проходящей через точки $X=a$ и $X=b$. В этом случае формула (36) записывается в виде:

$$A_i = \delta_i \int_0^1 \frac{\partial f(X=a+S\delta)}{\partial X_i} dS\,, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{37}$$

В случае же, если в качестве кривой интегрирования используется ломаная, составленная из ребер *n*-мерного параллелепипеда в пространстве факторов, то интегральный метод дает результат эквивалентный методу цепных подстановок.

В работе [1] предложен метод, названный его автором интегральным методом эластичностей. Однако, на наш взгляд, указанный метод не имеет преимуществ перед интегральным методом. Более того интегральный метод эластичностей неприменим к сепарабельным функциям.

В той же работе [1] рассматривается семейство так называемых экстремальных методов. Среди них наибольший интерес, по нашему мнению, представляет экстремальный метод первого порядка. Применение же других экстремальных методов связано со значительными вычислительными трудностями.

3.2. Метод точки Лагранжа

При рассмотрении ряда методов инфлюентного анализа, обсуждавшихся выше, можно обнаружить в них определенную общность подхода к решению задачи вычисления инфлюент. Эта общность состоит в том, что значения инфлюент A_i берутся пропорциональными приращениям факторов $\delta_i \quad (i=\overline{1,n})$ и значениям частных производных от $f(X)$ по рассматриваемому фактору. Так, в методе неопределенного множителя для расчета инфлюент используется формула (19), произведение в правой части которой, как нетрудно видеть, представляет собой значение частной производной мультипликативной функции по i -му фактору, вычисленной в точке $X = a + S\delta$. Значение $S \in [0,1]$ при этом определяется из условия равенства суммы инфлюент приращению показателя.

В интегральном методе для расчета инфлюент используется формула (37), правая часть которой представляет собой произведение приращения фактора и среднего интегрального значения частной производной по этому фактору от $f(X)$.

В соответствии с интегральной формулой Эйлера-Лагранжа [1] сумма инфлюент, вычисляемых по соотношениям (37) оказывается равной приращению показателя.

Подобный подход к вычислению инфлюент можно считать вполне обоснованным т.к. величина производной характеризует скорость изменения показателя, а в случае, если $f(X)$ изменяется монотонно при росте (уменьшении) данного фактора, то и абсолютная величина инфлюенты должна возрастать с ростом $|\delta_i|$.

Вместе с тем метод неопределенного множителя применим лишь к зависимостям мультипликативного вида, а использование интегрального метода в том числе и в условиях применения ЭВМ, связано с определенными трудностями. Дело в том, что интегральный метод требует вычисления частных производных функции $f(X)$. Аналитическое нахождение производных связано с выполнением значительной предварительной работы, предполагающей достаточно высокую квалификацию исполнителя, что, по существу, сводит на нет преимущества использования ЭВМ. Применение же многократного численного дифференцирования для получения значений подынтегральных функций представляется также нежелательным в связи с некорректностью операции численного дифференцирования [3].

Излагаемый ниже метод анализа, так же как и оба рассмотренных выше, дает значения инфлюент, пропорциональные приращениям факторов и значениям частных производных $f(X)$, вычисленных в некоторой точке факторного пространства. Он применим для функциональной зависимости произвольного вида и требует лишь однократного вычисления производных.

Метод основывается на теоремах Лагранжа о среднем значении, называемых также теоремами о конечном приращении. Эти теоремы формулируются следующим образом [5]:

<u>Теорема 1</u> (для функции одной переменной).

Если функция $f(X)$ непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (*a,b*), то в интервале (*a,b*) существует такое число X, что

$$f(b) - f(a) = f'(X) \cdot (b-a) \qquad (38)$$

<u>Теорема 2</u> (функция многих переменных)

Если функция $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ непрерывна при $a_i \le X_i \le b_i$ и дифференцируема при $a_i < X_i < b_i \quad (i=\overline{1,n})$, то существует набор таких чисел $X_1, X_2, ..., X_n$, что $a_i < X_i < b_i \quad (i=\overline{1,n})$ и

$$f(b_1, b_2, ..., b_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_1, X_2, ..., X_n} \cdot (b_i - a_i) \qquad (39)$$

Покажем, что при соблюдении условий теоремы 2 на отрезке прямой, соединяющей в n-мерном пространстве факторов точку a с координатами $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и b с координатами $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ существует точка, имеющая координаты, удовлетворяющие равенству теоремы 2.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки a и b, параметрически:

$$X_i = a_i + (b_i - a_i)S = a_i + S\delta_i \qquad (40)$$

где $0 \le S \le 1 \quad i = \overline{1,n}$

С учетом (40):

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(a_1 + S\delta_1, a_2 + S\delta_2, \ldots, a_n + S\delta_n) = f(S)$$

Т.е. на рассматриваемом отрезке $f(X)$ представляет собой функцию одной переменной S и к этой функции может быть применена теорема 1

$$f(S=1) - f(S=0) = \left.\frac{df}{dS}\right|_{S=\bar{S}} \cdot \Delta S \qquad (41)$$

где $0 < \bar{S} < 1$

С учетом того , что

$$f(S=0) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$f(S=1) = f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \ ,$$

$$\Delta S = 1$$

получаем

$$\left.\frac{df(S)}{dS}\right|_{S=\bar{S}} = \Delta f \qquad (42)$$

Производная в левой части (42) представляется в виде

$$\frac{df(S)}{dS} = \frac{\partial f}{\partial X_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}\delta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n}\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}\delta_i \qquad (43)$$

Подставляя это выражение в (42), получаем соотношение эквивалентное (39)

$$\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i = a_i + \bar{S}\delta_i} \cdot \delta_i = \Delta f \qquad (44)$$

что доказывает высказанное утверждение. Поскольку значение Δf при решении задачи инфлюентного анализа известно, уравнение

$$\frac{df(S)}{dS} = \Delta f \qquad (45)$$

может служить для нахождения значения $\bar{S}$, являющегося корнем этого уравнения.

Определив значение $\bar{S}$, можно вычислить инфлюенты, в качестве которых принимаются слагаемые левой части (44)

$$A_i = \delta_i \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i = a_i + \bar{S}\delta_i} \qquad (46)$$

В связи с тем, что при решении (45) необходимо вычислить частные производные, что, как отмечалось выше, нежелательно, преобразуем (45) к виду:

$$\frac{df(S)}{dS} - \Delta f = 0 \qquad (47)$$

Полученное соотношение можно рассматривать как условие экстремума функции $f(S) - S \cdot \Delta f$.

Следовательно значение $\bar{S}$, являющееся корнем (45), может определяться из условия

$$f(S) - S \cdot \Delta f = extr \qquad (48)$$

Таким образом, алгоритм численного определения инфлюент методом точки Лагранжа оказывается следующий:

1. Отыскивается (одним из методов поиска экстремума функции одной переменной, не требующим вычисления производных, например, методом золотого сечения [3]) значение $\overline{S}$, удовлетворяющее (48) и позволяющее определить координаты точки Лагранжа $X_i = a_i + \overline{S}\delta_i \quad (i = \overline{1,n})$
2. Вычисляются (численно или аналитически) значения частных производных в найденной точке, которые, будучи умножены на величины приращений факторов δ_i, дают значения инфлюент (формула (46)).

3.3. Метод частных функций

Рассмотрение данного метода начнем с обсуждения некоторых общих аспектов, касающихся задачи детерминированного инфлюентного анализа.

Постановка задачи о разложении приращения функции многих переменных в сумму, каждое слагаемое которой характеризует влияние отдельного аргумента (фактора) на величину общего прироста предполагает замену исходной зависимости сепарабельной функцией тех же аргументов в некотором смысле эквивалентной исходной зависимости. При этом такая замена обычно оказывается неявной. Так, при использовании рассмотренных выше методов неопределенного множителя, интегрального и метода точки Лагранжа исходная зависимость по существу заменяется линейной функцией вида

$$f^*(X_1, X_2, ..., X_n) = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n$$

где коэффициенты $c_i \quad (i = \overline{1,n})$ определяются как значения частных производных $f(X)$ в некоторых точках, причем эти значения должны удовлетворять условию (3), которое может быть в этом случае записано так:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_i = \Delta f$$

Излагаемый ниже метод частных функций основывается на замене исходной зависимости сепарабельной, но не линейной функцией факторов.

Рассмотрим частные функции

$$f_i(X_i) = f(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, ..., X_i, ..., \widetilde{X}_n) \qquad (49)$$

где $i = \overline{1,n}$; а $\widetilde{X}_j \in [a_j, b_j] \quad \begin{pmatrix} j = \overline{1,n} \\ j \neq i \end{pmatrix}$ - некоторые фиксированные значения.

Положим

$$\widetilde{X}_j = a_j + \widetilde{S}(b_j - a_j) = a_j + \widetilde{S}\delta_j \qquad (50)$$

где $0 \le \widetilde{S} \le 1$

С учетом (50) запишем

$$f_i(X_i) = f(X_i, \widetilde{S}) \qquad (51)$$

Введем в рассмотрение сепарабельную функцию факторов

$$F(X_1, X_2, ..., X_n, \widetilde{S}) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i, \widetilde{S}) \qquad (52)$$

Функция (52) обладает тем свойством, что характер зависимости её значения от каждого из факторов (при фиксации значений остальных факторов) остается таким же, что и у $f(X)$. Таким образом, $F(X, \widetilde{S})$ может служить заменой для $f(X)$ при решении задачи инфлюентного анализа в случае, если приращения этих функций при изменении X_i от a_i к b_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ будут одинаковы.

Потребуем равенства приращений ΔF и Δf:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(b_i,\widetilde{S})-f(a_i,\widetilde{S})\right]=\Delta f \qquad (53)$$

Соотношение (53) представляет собой уравнение с одним неизвестным $\widetilde{S}$. Вычислив корень этого уравнения $\overline{\widetilde{S}}$, можно определить значения инфлюент в качестве которых принимаются слагаемые левой части (53) при $\widetilde{S}=\overline{\widetilde{S}}$:

$$A_i = f(b_i,\overline{\widetilde{S}})-f(a_i,\overline{\widetilde{S}}) \qquad (54)$$

Выполним некоторые преобразования левой части (53)

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(b_i,\widetilde{S})-f(a_i,\widetilde{S})\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(S=1,\widetilde{S})-f_i(S=0,\widetilde{S})\right]$$

где $0\le S\le 1$ и $X_i=a_i+S\delta_i \quad (i=\overline{1,n})$

Далее

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(S=1,\widetilde{S})-f_i(S=0,\widetilde{S})\right]=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{df_i(S,\widetilde{S})}{dS}dS$$

В соответствии с теоремой о среднем значении [5]:

$$\int_0^1\frac{df_i(S,\widetilde{S})}{dS}dS=\left.\frac{df_i(S,\widetilde{S})}{dS}\right|_{S=\xi} \qquad (55)$$

где $0<\xi<1$

С учетом (55) уравнение (53) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{df_i(S=\xi,\widetilde{S})}{dS}=\Delta f \qquad (56)$$

Рассмотрим случай, когда частная производная $f(X)$ по X_i не зависит от X_i. Такая ситуация имеет место, когда $f(X)$ может быть представлена в виде

$$f(X)=\varphi_{1i}+X_i\cdot\varphi_{2i} \text{ для } i=\overline{1,n}$$

где φ_{1i} и φ_{2i} -функции n-1 факторов, среди которых нет X_i, что в свою очередь соответствует случаю, когда $f(X)$ представляет собой сумму произведений факторов. Причем каждый фактор может входить в качестве сомножителя в несколько слагаемых этой суммы, но лишь в первой степени:

$$f(X)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\prod_{r=1}^{n}X_r^{\beta_{r,k}} \qquad (57)$$

где числа $\beta_{r,k}$ равны либо 1 либо 0. Для этого случая

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{df_i(S=\xi,\widetilde{S})}{dS}=\sum_{i=1}^{n}\frac{df_i(\widetilde{S})}{dS}=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=a_i+\widetilde{S}\delta_i}\cdot\delta_i=\frac{df(\widetilde{S})}{d\widetilde{S}}$$

Таким образом, оказывается, что для рассматриваемого класса функций уравнение (53) принимает вид

$$\frac{df(\widetilde{S})}{d\widetilde{S}}=\Delta f \qquad (58)$$

что эквивалентно уравнению (45), полученному выше и используемому в методе точки Лагранжа.

В силу эквивалентности уравнений (53) и (45) и формул (54) и (46), используемых при расчете инфлюент, для функций вида (57) приходим к выводу, что на рассмотренном классе функций метод точки Лагранжа и метод частных функций эквивалентны.

Заметим также, что обсуждавшийся выше метод неопределенного множителя, является частным случаем метода точки Лагранжа (а значит и метода частных функций) для мультипликативных зависимостей.

Литература

1. Трухаев Р. И. Инфлюентный анализ и принятие решений (Детерминированный анализ) М.: Наука, 1984
2. Гончаров Н. Е. Повышение качества факторного анализа на транспорте. – М.: Транспорт, 1982
3. Калиткин Н. Н. Численные методы. М., «Наука», 1978
4. Экономико-математические методы в анализе хозяйственной деятельности предприятий и объединений. Бушник-Сиверский А. В., Сайфулин Р. С., Рейльян Я. Р. и др. – М.: Финансы и статистика, 1982
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) М., «Наука», 1977