НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ БЛИЗКИХ К ПОГЛОЩАЮЩИМ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ*

А. И. Зейфман[1], А. В. Чегодаев[2], В. С. Шоргин[3]

Аннотация: Изучаются, вообще говоря, нестационарные системы, описываемые счетными марковскими цепями с непрерывным временем, нулевое состояние которых является «почти поглощающим». Такие системы возникают при описании некоторых задач теории массового обслуживания. Исследуются предельные характеристики таких моделей. В качестве примеров рассмотрены модели, описываемые простыми нестационарными блужданиями.

Ключевые слова: сети массового обслуживания; цепи Маркова с непрерывным временем; эргодичность; процессы рождения и гибели; простое случайное блуждание

1 Введение

Марковские модели в задачах, связанных с системами и сетями массового обслуживания, исследуются и применяются очень давно (см., например, [1, 2]). При этом создание новых методов исследования марковских цепей и расширение круга решаемых задач вызвали появление целого ряда новых работ (см., например, [3] и приведенную там библиографию).

Более реалистические модели массового обслуживания, описываемые нестационарными марковскими цепями, активно изучаются уже более тридцати лет, начиная с заметки [4]. Построение предельного режима и нахождение явных формул для вероятностей состояний таких моделей, как правило, невозможно, поэтому, естественно, основной интерес связан с вопросами аппроксимации характеристик таких систем и получением количественных оценок (см., например, [5–8]).

В данной статье-заметке исследуется класс марковских цепей с непрерывным временем, для которых интенсивность выхода из нулевого состояния в определенном смысле мала. Такие цепи возникают при изучении различных классов задач массового обслуживания. Метод исследования, предложенный в [9] (см. также [10]), основан на применении: (а) логарифмической нормы оператора; (б) некоторых специальных перенормировок.

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, — нестационарная марковская цепь со счетным пространством состояний $E = \{0, 1, \ldots\}$. Обозначим через $p_{ij}(s,t) = P(X(t) = j|X(s) = i)$, $i, j \in E$, $0 \leq s \leq t$, вероятность перехода из состояния i в состояние j, а $p_i(t) = P(X(t) = i)$, $i \in E$, $t \geq 0$, — вероятность нахождения процесса в состоянии i. Пусть $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots)^T$ — вектор вероятностей состояний, $Q(t) = (q_{ij}(t))$, $t \geq 0$, — соответствующая матрица интенсивностей. Положим $A(t) = (a_{ij}(t)) = Q^T(t) = (q_{ij}(t))^T$. Для рассматриваемой в настоящей статье ситуации будет предполагаться, что $|q_{00}(t)| = |a_{00}(t)|$ достаточно мал. Динамика такого процесса при некоторых дополнительных предположениях описывается прямой системой Колмогорова:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}\,, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{1}$$

Далее будем предполагать,что $A(t)$ локально интегрируема на $[0, \infty)$ и ограничена почти при всех $t \geq 0$ как операторная функция на l_1. Тогда систему (1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение с ограниченным оператором в пространстве l_1. При этом оператор Коши $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t$, уравнения (1) определяется матрицей $U^T(t,s) = P(s,t) = (p_{ij}(s,t))$. Далее в тексте, если не указано противное, будет использоваться l_1-норма для векторов и матриц $\| \bullet \|$, а именно $\|x\| = \sum\limits_i |x_i|$ и $\|C\| = \sup\limits_j \sum_i |c_{ij}|$, где $C = (c_{ij})$. Обозначим Ω множество всех стохастических векторов: $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)^T : \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Рассмотрим $\mathbf{p}(t) \in \Omega$. Исключим из системы уравнение для нулевой координаты, полагая

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 06-01-00111.

[1]Вологодский государственный педагогический университет; Институт прикладной информатики Российской академии наук; ВНКЦ ЦЭМИ РАН; a_zeifman@mail.ru

[2]Вологодский государственный педагогический университет

[3]Институт прикладной информатики Российской академии наук

$$p_0(t) = 1 - \sum_{i\geq 1} p_i(t)\,,$$

тогда из (1) получается система

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z} + \mathbf{f}(t)\,, \qquad (2)$$

где

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t)-a_{10}(t) & a_{12}(t)-a_{10}(t) & \cdots \\ a_{21}(t)-a_{20}(t) & a_{22}(t)-a_{20}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{z} = (p_1, p_2 ...)^T; \quad \mathbf{f} = (a_{10}, a_{20}, \ldots)^T.$$

2 Эргодичность, общий случай

Рассмотрим вспомогательную последовательность положительных чисел $\{d_i\}$ и будем вначале предполагать, что

$$0 < m = \inf_i d_i; \quad M = \sup_{i,j} \frac{d_i}{d_j} < \infty\,. \qquad (3)$$

Положим

$$\alpha_i^*(t) = \sum_{j\geq 1} \frac{d_j}{d_i} a_{ji}(t)$$

и

$$\beta_*(t) = \inf_{i\geq 1}\, -\alpha_i^*(t)\,.$$

Пусть

$$|a_{00}(t)| \leq \varepsilon \beta_*(t)\,, \quad t \geq 0\,, \qquad (4)$$

причем

$$\int\limits_0^\infty \beta_*(t)\,dt = +\infty\,. \qquad (5)$$

Теорема 1. *Пусть $\{d_i\}$ — последовательность положительных чисел такая, что (3)–(5) выполнены. Пусть ε достаточно мало. Тогда $X(t)$ слабо эргодична, причем при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{i\geq 1} d_i\,|p_i(t) - \pi_i(t)| \leq \\ \leq e^{-\int\limits_0^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau} \sum_{i\geq 1} d_i\,|p_i(0) - \pi_i(0)| \leq \\ \leq 2Me^{-\int\limits_0^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau} \qquad (6)$$

и

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \geq 1 - \frac{M\varepsilon}{m\,(1-M\varepsilon)}\,, \qquad (7)$$

где $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \ldots)^T$ — предельное (квазистационарное) распределение вероятностей цепи.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную диагональную матрицу

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots)$$

и соответствующую обратную матрицу

$$D^{-1} = \operatorname{diag}\left(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots\right).$$

Пусть l_{1D} — пространство последовательностей таких, что $\|\mathbf{x}\|_{1D} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i |x_i| < \infty$.

Оценивая логарифмическую норму $\gamma\,(B(t))$ в l_{1D}, получаем

$$\gamma\,(B(t)) = \\ = \sup_{i\geq 1}\left(a_{ii}(t) - a_{i0} + \sum_{j\neq i} \frac{d_j}{d_i}\,|a_{ji}(t) - a_{j0}(t)|\right) \leq \\ \leq -\beta_*(t) + M\varepsilon\beta_*(t)\,.$$

Теперь, если $V(t,s)$ — оператор Коши уравнения (2), получаем

$$\|V(t,s)\| \leq e^{\int\limits_s^t \gamma(B(\tau))\,d\tau} \leq e^{-\int\limits_s^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau}.$$

Отсюда вытекает слабая эргодичность $X(t)$ и неравенство (6).

Далее, при любом начальном условии в норме l_{1D} получаем

$$\|\mathbf{z}(t)\| = \sum_{i\geq 1} d_i\,|p_i(t)| \leq \|V(t,0)\|\,\|\mathbf{z}(0)\| + \\ + \int\limits_0^t \|V(t,\tau)\|\,\|\mathbf{f}(\tau)\|\,d\tau \leq \\ \leq e^{-\int\limits_0^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau}\,\|\mathbf{z}(0)\| + \\ + \int\limits_0^t e^{-\int\limits_\tau^t (1-M\varepsilon)\beta_*(s)\,ds} M\,|a_{00}(\tau)|\,d\tau \leq \\ \leq e^{-\int\limits_0^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau}\,\|\mathbf{z}(0)\| + \frac{M\varepsilon}{1-M\varepsilon}\,,$$

а значит,

$$\limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1D} \leq \frac{M\varepsilon}{1-M\varepsilon}\,,$$

откуда следует (7).

Перейдем к рассмотрению ситуации, при которой вспомогательная последовательность не ограничена сверху. Аналогично предыдущей теореме устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\{d_i\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что выполнены (4), (5), а кроме того, при некотором N выполняется условие $q_{0i}(t) = a_{i0}(t) = 0$ при всех $i > N$, $t \geq 0$. Пусть ε достаточно мало. Тогда $X(t)$ слабо эргодична, причем при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{i\geq 1} d_i \left|p_i(t) - \pi_i(t)\right| \leq$$

$$\leq e^{-\int\limits_0^t (1-d_N\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau} \sum_{i\geq 1} d_i \left|p_i(0) - \pi_i(0)\right| \,,$$

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \geq 1 - \frac{d_N\varepsilon}{1-d_N\varepsilon}\,,$$

а кроме того,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t,\mathbf{p}) \leq \frac{d_N\omega\varepsilon}{1-d_N\varepsilon}\,,$$

где $\omega = \sup\limits_{k\geq 1} k/d_k$, а $E(t,\mathbf{p})$ — среднее (математическое ожидание) для $X(t)$ при начальном распределении вероятностей состояний $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$.

3 Эргодичность, процесс рождения и гибели

Пусть теперь $X(t)$ — «почти поглощающий» процесс рождения и гибели (ПРГ). В этом случае матрица интенсивностей

$$A(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} -a_0(t) & b_1(t) & 0 & \cdots \\ a_0(t) & -(a_1(t)+b_1(t)) & b_2(t) & \ddots \\ 0 & a_1(t) & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

является якобиевой (трехдиагональной).

Положим

$$\alpha_k(t) = a_k(t) + b_{k+1}(t) - d_{k+2}d_{k+1}^{-1}a_{k+1}(t) - \\ - d_k d_{k+1}^{-1} b_k(t)\,, \quad k \geq 1\,,$$

$$\alpha_0(t) = b_1(t) - d_2 d_1^{-1} a_1(t)$$

и

$$\beta(t) = \inf_{i\geq 0} \alpha_i(t)\,.$$

Рассмотрим теперь вместо (4) и (5) условия

$$|a_{00}(t)| = a_0(t) \leq \varepsilon\beta(t)\,, \quad t \geq 0\,, \tag{8}$$

и

$$\int\limits_0^\infty \beta(t)\,dt = +\infty \tag{9}$$

соответственно.

Теорема 3. *Пусть $\{d_i\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $d_1 = 1$, и выполнены условия (8) и (9). Пусть ε достаточно мало. Тогда ПРГ $X(t)$ слабо эргодичен, причем при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{i\geq 1} d_i \left|p_i(t) - \pi_i(t)\right| \leq$$

$$\leq 4e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\,d\tau} \sum_{i\geq 1} g_i \left|p_i(0) - \pi_i(0)\right| \,, \tag{10}$$

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \geq 1 - 2\varepsilon\,, \tag{11}$$

а кроме того,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t,\mathbf{p}) \leq 2\omega\varepsilon, \tag{12}$$

где $g_k = \sum\limits_{i=1}^k d_i$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

введем $1T$-норму как $\|\mathbf{x}\|_{1T} = \|T\mathbf{x}\|$, соответствующее пространство последовательностей l_{1T} и вычислим логарифмическую норму $\gamma\left(B(t)\right)_{1T}$. Тогда получаем

$$\gamma\left(B(t)\right)_{1T} = \gamma\left(TB(t)T^{-1}\right)_1\,.$$

Имеем при любом $a_0(t)$:

$$\gamma\left(B(t)\right)_{1T} = \\ = \sup_{k\geq 0}\left(-a_k(t) - b_{k+1}(t) + d_{k+2}d_{k+1}^{-1}a_{k+1}(t) + \\ + d_k d_{k+1}^{-1} b_k(t)\right) \leq -\beta(t)\,;$$

$$\|V(t,s)\|_{1T} \leq e^{-\int\limits_s^t \beta(\tau)\,d\tau}\,,$$

откуда с учетом известной оценки [6]

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1T} \geq \frac{1}{2} \sum_{i\geq 1} d_i \, |p_i(t)| \qquad (13)$$

получаем слабую эргодичность и неравенство (10).

Далее, при любом начальном условии в норме l_{1T} получаем

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \|V(t,0)\| \, \|\mathbf{z}(0)\| + \int\limits_0^t \|V(t,\tau)\| \, \|\mathbf{f}(\tau)\| \, d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{z}(0)\| + \int\limits_0^t e^{-\int\limits_\tau^t \beta(s)\,ds} |a_{00}(\tau)| \, d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{z}(0)\| + \varepsilon\,,$$

а значит,

$$\limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1T} \leq \varepsilon\,,$$

откуда следует (11).

Для доказательства (12) достаточно воспользоваться еще раз оценкой (13).

Следствие. При любом $k \geq 1$

$$\sum_{i\geq 1} d_i \, |p_{0i}(t) - p_{ki}(t)| \leq 2e^{-\int_0^t \beta(\tau)\,d\tau} \sum_{i=1}^k d_i\,.$$

Замечание. Тот же подход позволяет получать и нижние оценки скорости сходимости (см. [7, 9, 10]), а в случае периодических интенсивностей строить очень важную характеристику процесса — предельное среднее [6, 10].

4 Нуль-эргодичность

В двух предыдущих разделах интенсивность выхода из нулевого состояния могла быть и нулевой. Здесь же рассмотрим другую возможную ситуацию.

Положим

$$\alpha_i^*(t) = \sum_{j\geq 0} \frac{d_j}{d_i} a_{ji}(t)$$

и

$$\beta^*(t) = \inf_{i\geq 0} -\alpha_i^*(t)\,.$$

Пусть

$$\int\limits_0^\infty \beta^*(t)\,dt = +\infty\,. \qquad (14)$$

Теорема 4. *Пусть существует последовательность $\{d_i\}$ положительных чисел такая, что $d_0 = 1, \sup\limits_i d_i = d < \infty$ и (14) выполнено. Тогда цепь $X(t)$ нуль-эргодична.*

Более того, справедливы следующие оценки:

при всех $i, \mathbf{p}(0)$

$$p_i(t) \leq \frac{d}{\partial_i} e^{-\int\limits_0^t \beta^*(\tau)\,d\tau}; \qquad (15)$$

при всех $n, \mathbf{p}(0)$

$$\Pr\left(X(t) \leq n\right) \leq \frac{d}{\partial_n} e^{-\int\limits_0^t \beta^*(\tau)\,d\tau}; \qquad (16)$$

при всех n, k

$$\Pr\left(X(t) \leq n | X(0) = k\right) \leq \frac{d_k}{\partial_n} e^{-\int\limits_0^t \beta^*(\tau)\,d\tau}, \qquad (17)$$

где $\partial_n = \min\limits_{0\leq k\leq n} d_k$.

Доказательство. Доказательство проводится почти так же, как в теореме 1, только в качестве вспомогательного вводится пространство l_{1D^*} последовательностей таких, что $\|\mathbf{x}\|_{1D^*} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} d_i |x_i| < \infty$, а затем оценивается логарифмическая норма $\gamma\left(A(t)\right)$ в l_{1D^*}. Из получаемого в итоге неравенства

$$\|\mathbf{p}(t)\|_{1D^*} \leq e^{-\int_0^t \beta^*(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{p}(0)\|_{1D^*}$$

и сравнения норм и вытекают требуемые оценки.

Следствие. При выполнении условий теоремы 4 для любых $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$, $t \geq 0$ и любого n справедлива следующая оценка среднего:

$$E(t,\mathbf{p}) \geq (n+1)\left(1 - \frac{d}{\partial_n} e^{-\int\limits_0^t \beta^*(\tau)\,d\tau}\right).$$

Более точная оценка очень просто получается в случае процесса рождения и гибели.

Положим

$$\phi(t) = \inf_{i\geq 1}\left(a_i(t) - b_i(t)\right).$$

Пусть

$$\int\limits_0^\infty \phi(t)\,dt = +\infty\,. \qquad (18)$$

Теорема 5. *Пусть интенсивности ПРГ $X(t)$ таковы, что (18) выполнено и вдобавок $a_0(t) \ge \varepsilon\phi(t)$ при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда для любых $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$, $t \ge 0$ справедлива следующая оценка среднего:*

$$E(t, \mathbf{p}) \ge \varepsilon \int\limits_0^t \phi(\tau)\, d\tau + E(0, \mathbf{p})\,. \tag{19}$$

Доказательство получается непосредственно из оценки

$$\frac{dE}{dt} \ge a_0(t)p_0 + \sum_{i\ge1} (a_i(t) - b_i(t))\, p_i \ge \varepsilon\phi(t)\,.$$

5 Примеры

Пример 1. Простое случайное блуждание. Пусть $X(t)$ — процесс рождения и гибели с пространством состояний E и интенсивностями $a_0(t) = l(t)$ и $a_i(t) = a(t)$, $b_i(t) = b(t)$, $i \ge 1$. Такой процесс служит для описания простых моделей теории массового обслуживания (см. например, [11]). В этом случае возможно применение всех описанных подходов.

Эргодический случай. Пусть существует $s > 1$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty (b(t) - sa(t))\, dt = +\infty\,. \tag{20}$$

Положим $d_k = s^k$ для $k \ge 1$. Тогда

$$\alpha_k(t) = \left(1 - s^{-1}\right)(b(t) - sa(t))\,, \quad k \ge 1\,,$$
$$\alpha_0(t) = b(t) - sa(t)$$

и

$$\beta(t) = \left(1 - s^{-1}\right)(b(t) - sa(t))\,,$$

при этом условие (9) выполнено.

Пусть при достаточно малом ε

$$l(t) \le \varepsilon\beta(t), \quad t \ge 0\,. \tag{21}$$

Тогда ПРГ $X(t)$ слабо эргодичен, и при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:

$$\sum_{k\ge1} s^k\, |p_i(t) - \pi_i(t)| \le$$
$$\le 4e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\, d\tau} \sum_{i\ge1} g_i\, |p_i(0) - \pi_i(0)|\,, \tag{22}$$

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \ge 1 - 2\varepsilon\,, \tag{23}$$

а кроме того,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t, \mathbf{p}) \le 2\omega\varepsilon\,, \tag{24}$$

где $g_i = \sum\limits_{k=1}^i s^k$, $\omega = \sup_{k\ge1} \frac{k}{s^k}$.

Отметим, что в случае *стационарного* блуждания условие эргодичности (20) означает, что $a < b$. Пусть при этом вместо (21) выполнено более простое неравенство $l \le \varepsilon$. Тогда вместо (22)–(24) получаем при всех $\mathbf{p}(0)$ следующие оценки:

$$\sum_{k\ge1} s^k\, |p_i(t) - \pi_i| \le 4e^{-\beta t} \sum_{i\ge1} g_i\, |p_i(0) - \pi_i|\;;$$
$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \ge 1 - \frac{2\varepsilon}{\beta}\,,$$

а кроме того,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t, \mathbf{p}) \le \frac{2\omega\varepsilon}{\beta}\,,$$

где $s = \sqrt{b/a}$, $\beta = \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2$.

Нуль-эргодичность. Пусть существует $s < 1$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty (sa(t) - b(t))\, dt = +\infty\,, \tag{25}$$

и, кроме того, при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$l(t) \ge \varepsilon\, (sa(t) - b(t))\,. \tag{26}$$

Тогда ПРГ нуль-эргодичен и при $d = 1$, $d_k = s^k$, $\partial_n = s^n$ и $\beta^*(t) = \varepsilon\,(1 - s)\,(sa(t) - b(t))$ выполняются оценки (15)–(17).

Кроме того, справедлива и оценка типа (19), а именно

$$E(t, \mathbf{p}) \ge \varepsilon \int\limits_0^t (sa(\tau) - b(\tau))\; d\tau + E(0, \mathbf{p})\,.$$

В случае стационарного ПРГ условие (25) эквивалентно тому, что $a > b$, а условие (26) — тому, что $l > 0$. Выписав для удобства это условие в том же виде (26), получаем при $s = \sqrt{b/a}$, $\beta^* = \varepsilon\,(1 - s)\,(sa - b)$ соответственно оценки:

$$p_n(t) \le s^{-n} e^{-\beta^* t}\,,$$
$$\Pr\left(X(t) \le n\right) \le s^{-n} e^{-\beta^* t}\,,$$
$$\Pr\left(X(t) \le n | X(0) = k\right) \le s^{k-n} e^{-\beta^* t},$$
$$E(t, \mathbf{p}) \ge \varepsilon\,(sa - b)\, t + E(0, \mathbf{p})\,.$$

Пример 2. Простое случайное блуждание с разными скачками. Рассмотрим систему массового обслуживания, в которой требования в случае непустой очереди поступают парами (с интенсивностью $a(t)$), а обслуживаются по одному (с интенсивностью $b(t)$). При этом в случае отсутствия требований в системе возможна «иммиграция», т. е. поступление пары требований с интенсивностью $l(t)$. В этом случае $X(t)$ уже не является процессом рождения и гибели.

Эргодичность. Пусть существует $s > 1$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty (b(t) - s(s+1)a(t))\, dt = +\infty\,. \qquad (27)$$

Положим $d_k = s^k$ для $k \geq 1$. Тогда, как легко проверить,

$$\beta_*(t) = \left(1 - s^{-1}\right)(b(t) - s(s+1)a(t))\,,$$

далее, $N = 2$ и при $l(t) \leq \varepsilon\beta_*(t)$ и достаточно малом ε выполнены условия теоремы 2. Следовательно, при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:

$$\sum_{i\geq 1} s^i \left|p_i(t) - \pi_i(t)\right| \leq$$

$$\leq e^{-\int\limits_0^t \left(1-s^2\varepsilon\right)\beta_*(\tau)\, d\tau} \sum_{i\geq 1} s^i \left|p_i(0) - \pi_i(0)\right|\,,$$

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \geq 1 - \frac{s^2\varepsilon}{1 - s^2\varepsilon}\,,$$

а кроме того,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t, \mathbf{p}) \leq \frac{s^2\omega\varepsilon}{1 - s^2\varepsilon}\,,$$

где $\omega = \sup\limits_{k\geq 1} k/s^k$.

Отметим, что в случае стационарной ситуации (интенсивности не зависят от времени) условие (27) эквивалентно тому, что $2a < b$. Несложно получить оценки для этого случая, выбрав $s = \sqrt[3]{b/(2a)} > 1$.

Нуль-эргодичность. Пусть существует $s < 1$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty (s(s+1)a(t) - b(t))\, dt = +\infty$$

и, кроме того, при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$l(t) \geq \varepsilon\,(s(s+1)a(t) - b(t))\,.$$

Тогда блуждание нуль-эргодично, и при $d = 1$, $d_k = s^k$, $\partial_n = s^n$ и $\beta^*(t) = \varepsilon\left(1 - s^2\right)(s(s+1)a(t) - b(t))$ выполняются оценки (15)–(17) и (19).

Отметим, что в случае стационарной ситуации блуждание будет нуль-эргодичным при $2a > b$ и $l > 0$.

Литература

1. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. — М.: Наука, 1969.
2. *Bocharov P. P., D'Apice C., Pechinkin A. V., Salerno S.* Queueing theory. — Utrecht: VSP, 2003.
3. *Ching Wai-Ki, Ng M. K.* Markov chains: Models, algorithms and applications. — New York: Springer, 2006.
4. *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифф. уравнения, 1971. Т. 7. С. 1696–1698.
5. *Granovsky B. L., Zeifman A. I.* Nonstationary queues: Estimation of the rate of convergence // Queueing Systems, 2004. Vol. 46. P. 363–388.
6. *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing Systems, 2006. Vol. 52. P. 139–151.
7. *Зейфман А. И., Сатин Я. А.* Средние характеристики марковских систем обслуживания // Автоматика и телемеханика, 2007. № 9. С. 122–133.
8. *Margolius B.* Transient and periodic solution to the time-inhomogeneous quasi-birth death process // Queueing Systems, 2007. Vol. 56. P. 183–194.
9. *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stoch. Proc. Appl., 1995. Vol. 59. P. 157–173.
10. *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. — М.: ЭЛЕКС-КМ, 2008. 168 с.
11. *Toyoizumi H., Kobayashi Y., Kaiwa K., Shitozawa J.* Stochastic features of computer viruses: Towards theoretical analysis and simulation // The 5th St. Petersburg Workshop on Simulation. — StPB.: SPBU, 2005. P. 695–702.