О нестационарных системах обслуживания с катастрофами*

А. И. Зейфман[†], Я. А. Сатин[‡], А. В. Чегодаев[§]

Ключевые слова: Нестационарные системы обслуживания; марковские модели с катастрофами; слабая эргодичность; оценки; предельные характеристики; аппроксимация.

Аннотация: Рассматриваются модели обслуживания, описываемые процессами рождения и гибели (ПРГ) с катастрофами. Получены как оценки скорости сходимости к предельному режиму, так и оценки различных характеристик этого предельного режима. Рассмотрены также вопросы построения предельных характеристик и пример конкретной системы обслуживания.

1 Введение

Простейшие модели систем массового обслуживания с катастрофами начали изучаться несколько лет назад, см., например, подробную мотивацию и первые результаты в работах [1, 6]. Несколько другой подход для изучения близких моделей был

*Исследование поддержано грантом РФФИ 06-01-00111, и научным грантом Вологодской области.

[†]Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики РАН и ВНКЦ ЦЭМИ РАН, e-mail: a_zeifman@mail.ru

[‡]Вологодский государственный педагогический университет, e-mail:yacovi@mail.ru

[§]Вологодский государственный педагогический университет, e-mail: cheg_al@mail.ru

применен в [3]. Обсуждение современных исследований в этой области и некоторые новые результаты для общих стационарных ПРГ с катастрофами приведены в [2]. Нестационарная система обслуживания типа $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами была изучена недавно в [10]. В настоящей работе будет рассмотрен более общий класс моделей, описываемых нестационарными ПРГ с катастрофами.

Предлагаемый подход базируется на методе, возможность применения которого впервые была отмечена в заметке Б. В. Гнеденко и И. П. Макарова (см. [4]), а развитие его было проведено в работах одного из авторов настоящей статьи [7] и [8].

Пусть $X = X(t), t \geq 0$ – ПРГ с катастрофами, а $\lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$ и $\xi(t)$ – интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Обозначим через $p_{ij}(s,t) = Pr\left\{X(t) = j\,|X(s) = i\right\}, i,j \geq 0,\ 0 \leq s \leq t$, переходные вероятности процесса $X = X(t)$, а через $p_i(t) = Pr\left\{X(t) = i\right\}$ – его вероятности состояний.

Тогда вероятности состояний (при выполнении некоторых естественных дополнительных условий) удовлетворяют прямой системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dp_0}{dt} = -\left(\lambda_0(t) + \xi(t)\right)p_0 + \mu_1(t)p_1 + \xi(t), \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - \left(\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi(t)\right)p_k + \mu(t)_{k+1}p_{k+1}, k \geq 1. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathbf{p}(t) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)^T$, $t > 0$, вектор-столбец вероятностей состояний, а через $\mathbf{A}(t) = \left\{a_{ij}(t),\ t \geq 0\right\}$ – матрицу, порождаемую системой (1.1), при этом элементы матрицы $\mathbf{A}(t)$ определяются по формулам

$$a_{ij}(t) = \left\{\begin{array}{cc} \lambda_{i-1}\left(t\right), & \text{если} \quad j = i-1, \\ \mu_{i+1}\left(t\right), & \text{если} \quad j = i+1, \\ -\left(\lambda_i\left(t\right) + \mu_i\left(t\right) + \xi(t)\right), & \text{если} \quad j = i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Ограничимся здесь рассмотрением только таких процессов, интенсивности которых можно представить в следующем виде:

$$\lambda_n\left(t\right)=\nu_n\lambda\left(t\right),\ \mu_n\left(t\right)=\eta_n\mu\left(t\right),\quad t\geq 0,\quad n\in E, \tag{1.3}$$

предполагая, что числовые множители ограничены, то есть $0\leq\eta_n\leq M,\ 0\leq\nu_n\leq M$, см. подробное рассмотрение в [9].

Теперь можно систему (1.1) рассмотреть как дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{p}+\mathbf{g}(t),\quad t\geq 0, \tag{1.4}$$

в пространстве последовательностей l_1, где $\mathbf{g}(t)=(\xi(t),0,0,\dots)^T$.

Обозначим через $\Omega=\{\mathbf{x}:\ \mathbf{x}\geq 0,\ \|\mathbf{x}\|_1=1\}$ множество всех стохастических векторов.

Далее всюду будем считать «базисные» функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\xi(t)$ локально интегрируемыми на $[0;\infty)$. Более того, для простоты вычислений будем предполагать эти функции ограниченными, то есть будем считать, что при некотором L выполняется неравенство

$$\lambda(t)+\mu(t)+\xi(t)\leq L<\infty \tag{1.5}$$

почти при всех $t\geq 0$.

Тогда

$$\|A(t)\|_1=\sup_j\sum_i|a_{ij}(t)|\leq 2ML \tag{1.6}$$

почти при всех $t\geq 0$, а значит, задача Коши для уравнения (1.4) с начальным условием $\mathbf{p}(0)$ имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t)=U(t)\mathbf{p}(0)+\int\limits_0^t U(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau, \tag{1.7}$$

где $U(t,s)$ – оператор Коши уравнения (1.4). При этом если $\mathbf{p}(s)\in\Omega$, то и $\mathbf{p}(t)\in\Omega$ при любом $t\geq s$.

2 Оценки, случай большой интенсивности катастроф

Теорема 1. *Пусть*

$$\int\limits_0^\infty \xi(t)\,dt = \infty. \tag{2.8}$$

Тогда $X(t)$ слабо эргодичен в равномерной операторной топологии. При этом справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \le 2e^{-\int\limits_0^t \xi(\tau)\,d\tau} \tag{2.9}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(\mathbf{0})$.

Доказательство. Здесь и далее будет использоваться понятие логарифмической нормы операторной функции и соответствующие оценки, см. [5] и [9]. В условиях теоремы 1 имеем (через $\gamma\left(A(t)\right)_1$ обозначена логарифмическая норма в пространстве l_1):

$$\gamma\left(A(t)\right)_1 = \sup_i \left(a_{ii}(t) + \sum_{j\neq i} a_{ji}(t)\right) = -\xi(t). \tag{2.10}$$

А тогда справедлива следующая (точная!) оценка:

$$\|U(t,s)\| \le e^{-\int\limits_s^t \xi(\tau)\,d\tau} \tag{2.11}$$

для всех $0 \le s \le t$, а значит, и требуемое утверждение.

Замечание 1. *В общем случае можно рассматривать любой режим распределения вероятностей состояний $\mathbf{p}^*(t)$ в качестве предельного. Однако если все интенсивности ($\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\xi(t)$) 1-периодичны, то существует 1-периодический предельный режим, скажем $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)^T$.*

Далее будем изучать математические ожидания типа

$$E_{\mathbf{p}(0)}(t) = E_{\mathbf{p}(0)}\left\{X(t)\right\} = E\left\{X(t)\,|\mathbf{p}(0)\right\}, \tag{2.12}$$

и в частности

$$E_k(t) = E\left\{X(t)\,|X(0)=k\right\}. \tag{2.13}$$

Выпишем первые простейшие оценки.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (2.8). Тогда*

$$e^{-\int\limits_0^t \xi(\tau)\,d\tau} E_{\mathbf{p}(0)}(0) - M\int\limits_0^t \mu(\tau) e^{-\int\limits_\tau^t \xi(s)\,ds}\, d\tau \le$$

$$E_{\mathbf{p}(0)}(t) \le e^{-\int\limits_0^t \xi(\tau)\,d\tau} E_{\mathbf{p}(0)}(0) + M\int\limits_0^t \lambda(\tau) e^{-\int\limits_\tau^t \xi(s)\,ds}\, d\tau \tag{2.14}$$

при всех $t \ge 0$ *и любом* $\mathbf{p}(0)$.

Доказательство. Из (1.1) получаем:

$$\frac{dE_{\mathbf{p}(0)}(t)}{dt} = \sum_{k\ge 0}\left(\lambda_k(t) - \mu_k(t) - k\xi(t)\right)p_k(t). \tag{2.15}$$

Отсюда

$$\frac{dE_{\mathbf{p}(0)}(t)}{dt} \le M\lambda(t) - \xi(t)E_{\mathbf{p}(0)}(t) \tag{2.16}$$

и

$$\frac{dE_{\mathbf{p}(0)}(t)}{dt} \ge -M\mu(t) - \xi(t)E_{\mathbf{p}(0)}(t). \tag{2.17}$$

Теперь (2.14) вытекает из (2.16) и (2.17).

Определение 1. *Будем говорить, что марковская цепь* $X(t)$ *имеет* предельное среднее $\varphi(t)$, *если*

$$\lim_{t\to\infty}\left(\varphi(t) - E_k(t)\right) = 0 \tag{2.18}$$

при любом k.

Теорема 3. *Пусть интенсивности процесса $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$ 1-периодичны. Пусть, далее,*

$$\int_0^1 \xi(t)\,dt > 0. \tag{2.19}$$

Тогда $X(t)$ имеет 1-периодическое предельное среднее $\varphi(t)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях теоремы найдется $\delta > 1$, при котором

$$\int_0^1 \left(\xi(t) - M\left(\delta - 1\right)\lambda(t)\right)\,dt > 0. \tag{2.20}$$

Рассмотрим матрицу

$$D = diag\Big(1, \delta, \delta^2, \dots\Big) \tag{2.21}$$

и пространство последовательностей $\mathcal{B}$ таких, что $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i |x_i| < \infty$. Будем исследовать теперь прямую систему Колмогорова (1.4) как уравнение в пространстве $\mathcal{B}$. Тогда логарифмическую норму $\gamma\left(A(t)\right)$ в $\mathcal{B}$ можно оценить следующим образом:

$$\gamma\left(A\right)_{\mathcal{B}} = \sup_{i\geq 0}\Big(\delta\lambda_i(t) - \left(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi(t)\right) + \delta^{-1}\mu_i(t)\Big) \leq \tag{2.22}$$
$$\sup_{i\geq 0}\left(\left(\delta - 1\right)\lambda_i(t) - \xi(t)\right) \leq -\left(\xi(t) - M\left(\delta - 1\right)\lambda(t)\right).$$

А тогда имеем

$$\|U(t,s)\|_{\mathcal{B}} \leq e^{-\int\limits_s^t \left(\xi(\tau) - M(\delta-1)\lambda(\tau)\right)\,d\tau} \tag{2.23}$$

при всех $0 \leq s \leq t$.

Следовательно,

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq e^{-\int\limits_0^t \left(\xi(\tau) - M(\delta-1)\lambda(\tau)\right)\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{\mathcal{B}} \tag{2.24}$$

для любых допустимых начальных условий $\mathbf{p}^*(0),\ \mathbf{p}^{**}(0)$.

С другой стороны, используя условия теоремы, получаем следующую оценку:

$$\limsup_{t\to\infty}\|\mathbf{p}(t)\|_{\mathcal{B}} \le \limsup_{t\to\infty}\left(\|U(t)\mathbf{p}(0)\|_{\mathcal{B}} + \int\limits_0^t \|U(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau\|_{\mathcal{B}}\right) \le$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_0^t \xi(\tau) e^{-\int\limits_\tau^t (\xi(u)-M(\delta-1)\lambda(u))\,du}\,d\tau = \mathsf{M} < \infty \tag{2.25}$$

при любом $\mathbf{p}(0)$.

Положим

$$W = \sup_n \frac{n}{\delta^n} < \infty. \tag{2.26}$$

Тогда получаем

$$\limsup_{t\to\infty} E_{\mathbf{p}(0)}(t) = \limsup_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) \le W \limsup_{t\to\infty}\|\mathbf{p}(t)\|_{\mathcal{B}} \le W\mathsf{M} \tag{2.27}$$

при любом допустимом $\mathbf{p}(0)$.

Выберем теперь $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$, $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\pi_k(t)$ и $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$. Тогда в (2.24) имеем:

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathcal{B}} \le e^{-\int\limits_0^t (\xi(\tau)-M(\delta-1)\lambda(\tau))\,d\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \pi_k(0) \le \mathsf{M} e^{-\int\limits_0^t (\xi(\tau)-M(\delta-1)\lambda(\tau))\,d\tau}. \tag{2.28}$$

Окончательно получаем следующую оценку:

$$|\varphi(t) - E_0(t)| \le W\mathsf{M} e^{-\int\limits_0^t (\xi(\tau)-M(\delta-1)\lambda(\tau))\,d\tau}. \tag{2.29}$$

Правая часть (2.29) стремится к нулю при $t\to\infty$ в соответствии с (2.20). Легко убедиться, что тогда и $|\varphi(t) - E_k(t)| \to 0$ при $t\to\infty$ для *любого* k. А значит, $\varphi(t)$ – 1-периодическое предельное среднее для $X(t)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда справедлива оценка скорости сходимости к предельному среднему (2.29).*

Замечание 2. *Предельное среднее существует, в принципе, независимо от свойств интенсивностей как функций времени. Однако в общем случае в качестве предельного среднего можно выбирать любое среднее, поскольку никаких его особых свойств гарантировать нельзя. Достаточным условием существования в этом общем случае будет (2.20) вместо (2.19).*

3 Оценки, общий случай

Пусть d_i – некоторые положительные числа.

Положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t), \quad k \geq 0, \tag{3.30}$$

и

$$\alpha(t) = \inf_{k\geq 0} \alpha_k(t). \tag{3.31}$$

Теорема 4. *Пусть заданы интенсивности $\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ для процесса рождения и гибели с катастрофами $X(t)$.*
Пусть существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots$, и при этом

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, dt = +\infty. \tag{3.32}$$

Тогда $X(t)$ слабо эргодичен для любой $\xi(t)$ и справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2e^{-\int_s^t \alpha(\tau)\, d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \tag{3.33}$$

при всех $s, t,\ 0 \leq s \leq t$, и любых допустимых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s),\ \mathbf{p}^{**}(s)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{p}(t) \in \Omega$ при всех $t \geq s$, можно положить $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ (для обычных ПРГ этот подход подробно описан, например, в [9]), и тогда из (1.4) получим систему

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dt} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0+\lambda_1+\mu_1+\xi_1) & (\mu_2-\lambda_0) & -\lambda_0 & -\lambda_0 & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & -(\lambda_2+\mu_2+\xi_2) & \mu_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3+\mu_3+\xi_3) & \mu_4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

или, в векторном виде,

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{3.35}$$

Решение этого неоднородного уравнения можно записать в виде

$$\mathbf{z}(t) \;\; = \;\; V(t,0)\mathbf{z}(0) + \int_0^t V(t,z)\mathbf{f}(z)\,dz, \tag{3.36}$$

где $V(t,z)$ – оператор Коши уравнения (3.35).

Рассмотрим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & \cdots \\ 0 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

и пространство последовательностей

$$\ell_{1D} = \{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \ldots) : \|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty\}. \tag{3.38}$$

Имеем

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_0^{-1} & -d_1^{-1} & 0 & \ddots & \\ 0 & d_1^{-1} & -d_2^{-1} & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots\, d_2^{-1} & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь логарифмическую норму $\gamma\left(B(t)\right)_{1_D} = \gamma\left(DB(t)D^{-1}\right)_1$. Имеем

$$DB(t)D^{-1} = \begin{pmatrix} -\left(\lambda_0+\mu_1+\xi\right) & d_0 \cdot d_1^{-1} \cdot \mu_1 & 0 & \dots & \\ d_1 \cdot d_0^{-1} \cdot \lambda_1 & -\left(\lambda_1+\mu_2+\xi\right) & d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \mu_2 & 0 & \\ 0 & d_2 \cdot d_1^{-1} \cdot \lambda_2 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \dots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (3.39)$$

и, следовательно,

$$\gamma\left(B\right)_{1D} = \sup_{i\geq 0}\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\lambda_{i+1}(t) - \left(\lambda_i(t)+\mu_{i+1}(t)+\xi(t)\right) + \frac{d_{i-1}}{d_i}\mu_i(t)\right) \leq -\alpha(t) \qquad (3.40)$$

в соответствии с (3.30). Теперь, используя доказательство теоремы 1 из [9], получаем

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int\limits_s^t \alpha(\tau)\,d\tau}\|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \qquad (3.41)$$

Сравним теперь нормы вектора $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)^T$ в пространствах $\mathcal{B}$ и l_{1D}. Имеем

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{B}} = \sum_{i\geq 1} d_i z_i = d_1\left(\left|\sum_{i\geq 1} z_i + \sum_{i\geq 2} -z_i\right|\right) + d_2\left(\left|\sum_{i\geq 2} z_i + \sum_{i\geq 3} -z_i\right|\right) + \dots \leq$$
$$d_1\left|\sum_{i\geq 1} z_i\right| + 2d_2\left|\sum_{i\geq 2} z_i\right| + \dots \leq 2\|\mathbf{z}\|_{1D}, \qquad (3.42)$$

откуда в итоге и вытекает требуемое утверждение.

Следствие 2. *Пусть при выполнении условий теоремы последовательность d_i возрастает достаточно быстро так, что $\inf\limits_{k\geq 1} \frac{d_k}{k} = \omega > 0$. Тогда $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi^*(t)$ и справедлива следующая оценка:*

$$|\phi^*(t) - E_k(t)| \leq \frac{2}{\omega} e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{e_k}\|_{1D}. \tag{3.43}$$

Теорема 5. *Пусть при выполнении условий предыдущего следствия все интенсивности 1-периодичны. Тогда существуют 1-периодический предельный режим распределения вероятностей состояний $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)^T$ и соответствующее ему предельное 1-периодическое среднее $\phi(t)$. Кроме того, справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{p}(0) - \pi(0)\|_{1D}, \tag{3.44}$$

$$|\phi(t) - E_k(t)| \leq \frac{2}{\omega} e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \|\pi(0) - \mathbf{e_k}\|_{1D}. \tag{3.45}$$

К сожалению, полученные оценки (3.44) и (3.45) имеют один существенный недостаток, связанный с отсутствием информации о $\pi(0)$, а значит, и возможностью реального применения. Рассмотрим способ, позволяющий получить такую информацию. Пусть $X(0) = k$, тогда имеем $\|\mathbf{e_k}\|_{1D} = \sum_{i=1}^k d_i$ при $k \geq 1$ и $\|\mathbf{e_0}\|_{1D} = 0$. Далее, используя подход из [9], можно оценить $\|\pi(0)\|_{1D}$ следующим образом. Имеем

$$\sup_{|t-s|\leq 1} \int\limits_s^t \alpha(\tau)\,d\tau = K < \infty, \tag{3.46}$$

далее получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1D} \leq \left\| \int_0^t V(t,\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau \right\|_{1D} \leq L\nu_0 \int_0^t e^{\int_\tau^t -\alpha(u)\,du} d\tau \leq$$
$$Le^K \nu_0 \int_0^t e^{-\alpha^*(t-\tau)} d\tau \leq \frac{Le^K \nu_0}{\alpha^*}, \tag{3.47}$$

где $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(u)\,du$.

Кроме того, с учетом 1-периодичности $\pi(t)$ справедливо неравенство $\|\pi(0)\|_{1D} \leq \limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1D}$. А тогда получаем

$$\|\pi(0) - \mathbf{e_k}\|_{1D} \leq \limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1D} + \|\mathbf{e_k}\|_{1D} \tag{3.48}$$

и следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы 5 выполняется равенство $X(0) = k$. Тогда справедливы следующие оценки скорости сходимости:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \left(\sum_{i=1}^{k} d_i + \frac{Le^K \nu_0}{\alpha^*}\right) \tag{3.49}$$

и

$$|\phi(t) - E_k(t)| \leq \frac{2}{\omega} e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \left(\sum_{i=1}^{k} d_i + \frac{Le^K \nu_0}{\alpha^*}\right). \tag{3.50}$$

4 Аппроксимации

Рассмотрим семейство «усеченных» процессов $X_n(t),\ n \geq S$, с фазовыми пространствами $E_n = \{0, 1, \dots, n\}$, теми же интенсивностями при $k \leq n$ и матрицами интенсивностей $A_n(t)$.

Пусть $\{h_k\}$ – последовательность положительных чисел такая, что $1 = h_1 \leq h_2 \leq \dots$, и

$$w_n = \sup_{k\geq n} \frac{h_k}{d_k}. \tag{4.51}$$

Обозначим через $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{B}_d}$ и $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{B}_h}$ нормы, соответствующие пространствам $\mathcal{B}$ для последовательностей $\{d_k\}$ и $\{h_k\}$ соответственно.

Теорема 6. *Пусть при выполнении условий теоремы 5 дополнительно выполнено условие* $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. *Пусть* $X(0) = X_n(0) = 0$. *Тогда*

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_{\mathcal{B}_h} \leq \frac{6L^2 M w_n e^K \nu_0 t}{\alpha^*} \tag{4.52}$$

при всех $t \geq 0$ *и любом* n.

Доказательство. Будем отождествлять векторы $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)^T$ и $(x_1, \dots, x_n)^T$. Рассмотрим прямую систему Колмогорова (1.4) для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_n(t)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t) + (A(t) - A_n(t))\,\mathbf{p}, \tag{4.53}$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p_n}}{dt} = A_n(t)\mathbf{p_n} + \mathbf{g}(t) \tag{4.54}$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_n(t) = U_n(t)\mathbf{p}(0) + \int\limits_0^t U_n(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau \tag{4.55}$$

при $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0)$ и

$$\mathbf{p}(t) = U_n\,(t)\,\mathbf{p}(0) + \int\limits_0^t U_n(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t U_n\,(t,\tau)\,(A(\tau) - A_n(\tau))\,\mathbf{p}(\tau)\,d\tau. \tag{4.56}$$

Тогда (в любой норме) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| = \left\|\int\limits_0^t U_n\,(t,\tau)\,(A(\tau) - A_n(\tau))\,\mathbf{p}(\tau)\,d\tau\right\|. \tag{4.57}$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{00}^n & . & . & u_{0n}^n & 0 & 0 & \cdots \\ u_{10}^n & . & . & u_{1n}^n & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \\ u_{n0}^n & . & . & u_{nn}^n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

Тогда

$$(A - A_n)\,\mathbf{p} = (0, \ldots, 0, -\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1}, \lambda_n p_n - (\lambda_{n+1} + \mu_{n+1} + \xi)\, p_{n+1} + \mu_{n+2} p_{n+2}, \ldots)^T \tag{4.59}$$

и, следовательно,

$$U_n (A - A_n)\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} u_{0n}^n \left(-\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1}\right) \\ u_{1n}^n \left(-\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1}\right) \\ \vdots \\ u_{nn}^n \left(-\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1}\right) \\ \lambda_n p_n - (\lambda_{n+1} + \mu_{n+1} + \xi)\, p_{n+1} + \mu_{n+2} p_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

С учетом неравенств $u_{ij}^n(t,\tau) \geq 0$ (при всех i, j, t, τ) и равенств $\sum_i u_{ij}^n(t,\tau) = 1$ (при всех j, t, τ) получаем оценку

$$\|U_n (A - A_n)\,\mathbf{p}\|_{\mathcal{B}_h} = |-\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1}| \sum_{k \leq n} h_k u_{kn}^n +$$

$$\sum_{k>n} h_{k+1} \left|\lambda_k p_k - (\lambda_{k+1} + \mu_{k+1} + \xi)\, p_{k+1} + \mu_{k+2} p_{k+2}\right| \leq 3LM \sum_{k \geq n} h_k p_k =$$

$$3LM \sum_{k \geq n} \frac{h_k}{d_k} d_k p_k \leq 3LM w_n \limsup_{t \to \infty} \|\pi(t)\|_{\mathcal{B}_d} \leq \frac{6L^2 M w_n e^K \nu_0}{\alpha^*}. \tag{4.61}$$

Теперь из (4.57) и (4.61) получаем

$$\|\mathbf{p}(t)-\mathbf{p}_n(t)\|_{\mathcal{B}_h} \le 3LMw_n \int\limits_0^t \limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{\mathcal{B}_d}\, d\tau \tag{4.62}$$

и требуемое утверждение.

Замечание 3. *По-видимому, наиболее интересные оценки получаются, если выбрать $h_k = 1$ или $h_k = k$ (при всех k). Первый случай дает возможность построить 1-периодические предельные вероятности, а второй – предельное среднее.*

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 6, а $X(0) = X_n(0) = 0$. Тогда при всех $t \ge 0$ и любом n справедливы оценки*

$$\|\pi(t)-\mathbf{p}_n(t)\|_1 \le 2e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \frac{Le^K\nu_0}{\alpha^*} + \frac{6L^2Mw_n^1e^K\nu_0 t}{\alpha^*} \tag{4.63}$$

и

$$|\phi(t)-E_{0,n}(t)| \le \frac{2}{\omega}e^{-\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau} \frac{Le^K\nu_0}{\alpha^*} + \frac{6L^2Mw_n^2e^K\nu_0 t}{\alpha^*}, \tag{4.64}$$

где $w_n^1 = \sup_{k\ge n}\frac{1}{d_k}$, $w_n^2 = \sup_{k\ge n}\frac{k}{d_k}$ и $E_{0,n} = E_k(t) = E\left\{X_n(t)\,|X_n(0)=0\right\}$.

Пусть $J_k(t) = \Pr\left(X(t) \le k\right)$ – вероятность того, что число требований в системе в момент t не превышает k. Полученные оценки позволяют приближенно вычислить предельные 1-периодические $J_k(t)$ и предельное 1-периодическое среднее следующим образом.

Пусть ε – произвольное положительное число.

1. Выбираем целое m так, чтобы первое слагаемое в правой части (4.63) было меньше $\varepsilon/3$ при всех $t \ge m$.

2. Находим n так, чтобы второе слагаемое в правой части (4.63) было меньше $\varepsilon/3$ при всех $t \le m+1$.

3. Тогда решение задачи Коши для усеченной прямой системы Колмогорова (4.54) с начальным условием $\mathbf{e}_0$ на отрезке $[m; m+1]$ (вычисленное с погрешностью $\varepsilon/3$) дает предельный 1-периодический режим $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)^T$ с погрешностью меньше ε.

4. Наконец, предельное 1-периодическое выражение для $J_k(t) = \Pr\{X(t) \le k\}$ вычисляется как $\sum_{i=0}^{k} \pi_i(t)$ с той же погрешностью ε.

Предельное среднее находится аналогично.

5 Пример

Рассмотрим систему обслуживания $M(t)/M(t)/100$ с катастрофами, считая, что интенсивности задаются следующим образом: $\lambda(t) = 3 + \sin 2\pi t$, $\mu(t) = 2 + \cos 2\pi t$, $\xi(t) = 2 + \sin 4\pi t$, и вычислим предельное среднее $\phi(t)$, а также предельные величины $J_k(t)$ при некоторых значениях k. В частности, $J_0(t)$ – вероятность того, что в момент t очередь пуста, то есть в системе обслуживания нет ни одного требования.

Используя подход, описанный в предыдущих параграфах, выберем $d = 1.3$ и $d_k = d^k$. Тогда будет: $L = 10$, $M = 100$, $\nu_0 = 1$, $w_n^1 = 1.3^{-n}$, $w_n^2 = \frac{n}{1.3^n}$, далее $\alpha(t) = \mu(t) - (d-1)\lambda(t) = 1.1 + \cos 2\pi t - 0.3 \sin 2\pi t$, $K \le 4$, и $\alpha^* = 1.1$.

Пусть $\varepsilon = 10^{-6}$. Тогда, как следует из полученных оценок, можно выбрать $m = 30$ и $n = 155$. При этом предельное среднее $\phi(t)$ и все предельные величины $J_k(t)$ строятся с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$ как соответствующие характеристики решения с начальным условием $\mathbf{e}_0$ задачи Коши для соответствующей усеченной прямой системы Колмогорова на отрезке $[m, m+1]$. Приведенные рисунки 1–4 дают приближенные с описанной погрешностью предельные характеристики $\phi(t)$, и $J_0(t), J_5(t), J_{10}(t)$ соответственно. Отметим, что при $k \ge 11$ получается уже $J_k(t) \approx 1$.

Замечание 4. *Отметим в заключение, что аналогично можно рассмотреть несколько более общую ситуацию, когда интенсивности катастроф зависят от состояния процесса. Основные изменения в этом случае будут касаться результатов параграфа 2.*

Список литературы

[1] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347 .

[2] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* A note on birth-death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett., 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.

[3] *Van Doorn E. A., Zeifman A.* Extinction probability in a birth-death process with killing // J. Appl. Probab., 2005. Vol.42. P. 185–198.

[4] *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифф. уравнения, 1971. Т. 7. С. 1696–1698.

[5] *Granovsky B., Zeifman A.* Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence // Queueing Syst., 2004. Vol. 46. P. 363–388.

[6] *Krishna Kumar B., Arivudainambi D.* Transient solution of an M/M/1 queue with catastrophes // Comput. Math. Appl., 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.

[7] *Zeifman A. I.* Stability for contionuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Mathem., 1985. Vol. 1155. P. 401–414.

[8] *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stoch. Proc. Appl., 1995. Vol. 59. P. 157–173.

[9] *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.

[10] *Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V.* Some bounds for $M(t)/M(t)/S$ queue with catastrophes // Proceedings of SMCTools08. Athens, Greece, 2008.

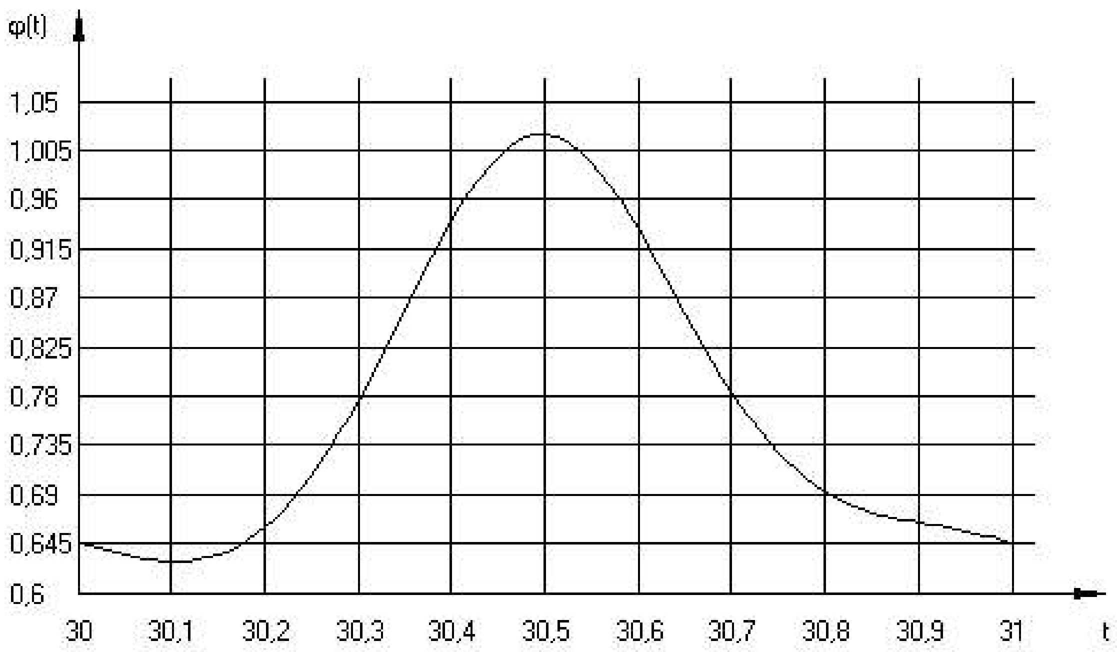

Рис. 1: Предельное среднее

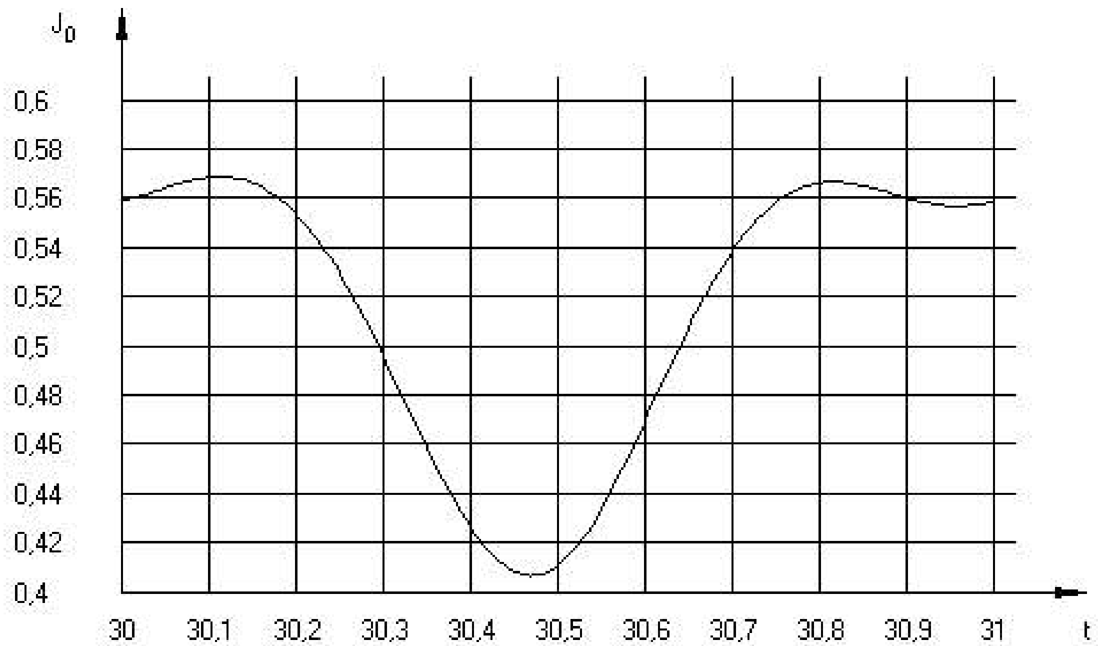

Рис. 2: Вероятность $Pr\{X(t) = 0\}$

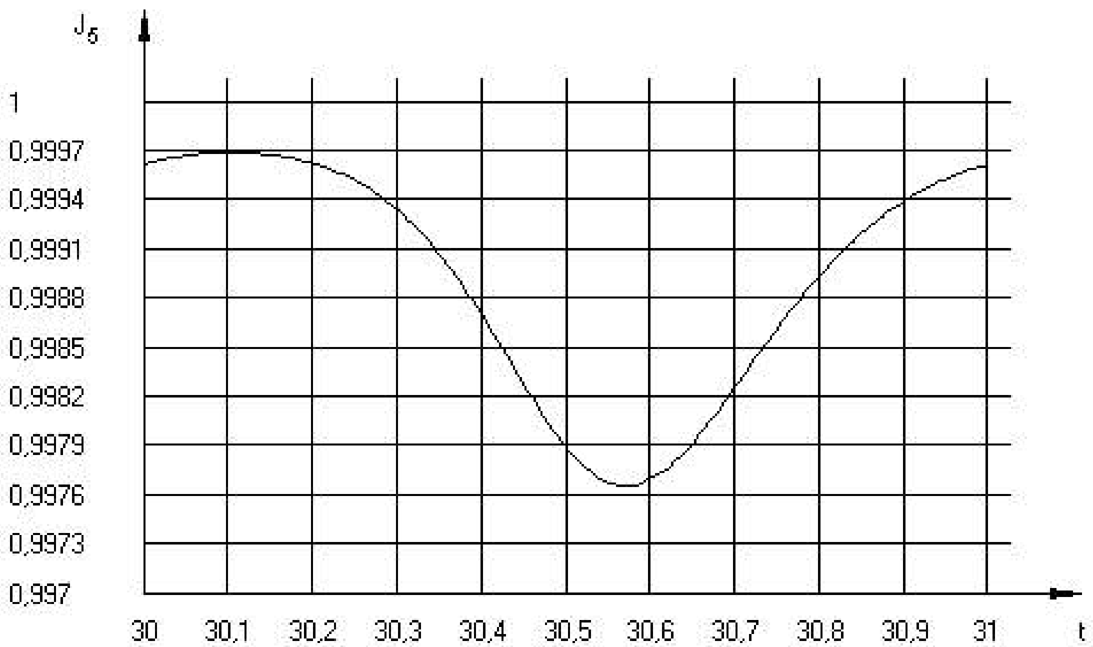

Рис. 3: Вероятность $Pr\left\{X(t) \leq 5\right\}$

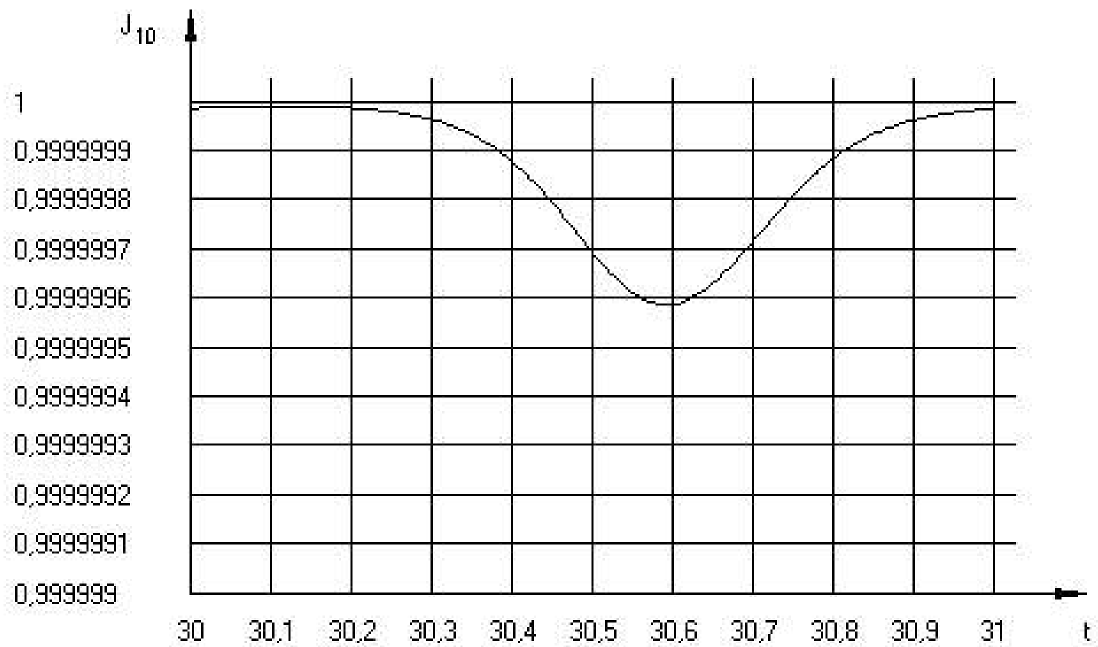

Рис. 4: Вероятность $Pr\left\{X(t) \leq 10\right\}$

Keywords: Nonstationary queues; Markovian models with catastrophes; weak ergodicity; bounds; limiting characteristics; approximations.

We consider nonstationary birth and death processes (BDPs) with catastrophes. The bounds of the rate of convergence to the limit regime and the estimates of the limit probabilities are obtained. We also study the bounds for the mean of the process and consider a queueing example.

Сведения об авторах:

Зейфман Александр Израилевич (1954 г. р.), доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета, старший научный сотрудник ИПИ РАН, ведущий научный сотрудник ВНКЦ ЦЭМИ РАН. Адрес электронной почты: a_zeifman@mail.ru

Zeifman Alexander I. (b. 1954), doctor of science in physics and mathematics, professor, dean of the faculty of applied mathematics and computer technologies, Vologda State Pedagogical University, senior researcher, Institute of Informatics Problems RAS, leading researcher, VSCC CEMI RAS. E-mail: a_zeifman@mail.ru

Сатин Яков Александрович (1978 г. р.), кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа Вологодского государственного педагогического университета. Адрес электронной почты: yacovi@mail.ru

Satin Yakov A. (b. 1978), candidate of of science in physics and mathematics, senior lecturer, Vologda State Pedagogical University. E-mail: yacovi@mail.ru

Чегодаев Александр Вячеславович (1983 г. р.), аспирант факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета. Адрес электронной почты: cheg_al@mail.ru

Chegodaev Alexander V. (b. 1983), PhD student, faculty of applied mathematics and computer technologies, Vologda State Pedagogical University. E-mail: cheg_al@mail.ru