

# О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами

А. И. Зейфман\*, Я. А. Сатин†, А. В. Коротышева‡, Н. А. Тершина§

**Аннотация:** Рассматривается модель системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами в общем случае, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе. Получены достаточные условия слабой эргодичности процесса, описывающего число требований в системе, и соответствующие оценки. Рассмотрено несколько примеров построения предельных характеристик системы.

**Ключевые слова:** Нестационарные марковские системы обслуживания; процесс рождения и гибели с катастрофами; слабая эргодичность; оценки; предельные характеристики; аппроксимация

## 1 Введение

Простейшие (стационарные) модели систем обслуживания с катастрофами начали рассматриваться не очень давно, см., например, [1]–[4]. В таких моделях предполагается, что если в системе обслуживания имеется ненулевое число требований, то с

---

\*Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики РАН и ВНКЦ ЦЭМИ РАН, a\_zeifman@mail.ru

†Вологодский государственный педагогический университет, yacovi@mail.ru

‡Вологодский государственный педагогический университет, a\_korotysheva@mail.ru

§Вологодский государственный педагогический университет, nataliya\_tereshi@mail.ru

ненулевой интенсивностью возможна катастрофа, то есть потеря всех требований, с дальнейшим продолжением функционирования системы обслуживания. Нестационарные марковские модели (процессы рождения и гибели) с катастрофами изучались в работах [5, 6] для случая, когда интенсивности катастроф не зависят от числа требований в системе. В настоящей работе изучается модель системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами в более общем случае, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе обслуживания. При этом удастся получить достаточно общие условия, гарантирующие наличие слабой эргодичности для процесса, описывающего число требований в такой системе обслуживания, и получить оценки скорости сходимости, гарантирующие возможность приближенного построения предельных характеристик системы.

Обозначим через  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , число требований в момент  $t$  для описываемой модели. Тогда  $X = X(t)$  является процессом рождения и гибели с катастрофами. Интенсивности рождения, гибели и катастрофы для процесса в случае, если  $X(t) = n$ , есть  $\lambda_n(t) = \lambda(t)$ ,  $\mu_n(t) = \min(n, S)\mu(t)$  и  $\xi_n(t) = \zeta_n\xi(t)$  соответственно.

Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$  вероятности перехода, а через  $p_i(t) = Pr \{X(t) = i\}$  – вероятности состояний для процесса  $X = X(t)$ .

Тогда для описания процесса получаем прямую систему Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda_0(t)p_0 + \mu_1(t)p_1 + \sum_{k \geq 1} \xi_k(t)p_k, \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - (\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi_k(t))p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Пусть  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$ ,  $t > 0$ , – вектор-столбец вероятностей состояний процесса, а  $A(t) = \{a_{ij}(t), t \geq 0\}$  – матрица системы (1.1).

В работе будет предполагаться, что интенсивности поступления и обслуживания требований  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  локально интегрируемы на  $[0; \infty)$ . Будем считать «базисную» интенсивность катастрофы  $\xi(t)$  локально интегрируемой на  $[0; \infty)$ , а коэффициенты состояний – ограниченными, то есть  $0 \leq \zeta_n \leq M$  при некотором  $M < \infty$ . Тогда

систему (1.1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$  с ограниченной почти при всех  $t \geq 0$  локально интегрируемой оператор-функцией  $A(t)$ . Следовательно, можно применять общий подход, предложенный впервые в заметке [7] и развитый затем в [8, 9]. Метод опирается на две основные составляющие: понятие и оценки, связанные с логарифмической нормой операторной функции, и специальные преобразования редуцированной матрицы интенсивностей рассматриваемой марковской цепи, и позволяет получать явные и точные оценки.

## 2 Слабая эргодичность

Напомним основные определения.

Марковскую цепь  $X(t)$  назовем *слабо эргодичной*, если  $\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любых начальных распределений вероятностей состояний  $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(0)$  (здесь и далее через  $\|\mathbf{x}\|$  обозначена  $l_1$ -норма).

Положим  $E_k(t) = E\{X(t) | X(0) = k\}$  – математическое ожидание процесса в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии  $k$ , иногда будет встречаться также несколько более общее выражение  $E_{\mathbf{p}}(t) = \sum_{k \geq 0} E\{X(t) | X(0) = k\} p_k(0)$ .

Будем говорить, что марковская цепь  $X(t)$  имеет *предельное среднее*  $\varphi(t)$ , если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t) - E_k(t)) = 0$$

при любом  $k$ .

В настоящей работе будет изучаться слабая эргодичность и сопутствующие свойства числа требований в рассматриваемой системе обслуживания для следующих важных ситуаций:

- (1) интенсивности катастроф существенны при любой длине очереди;
- (2) интенсивность обслуживания требований достаточно велика;
- (3) достаточно велика интенсивность поступления требований, а интенсивности катастроф существенны для ситуаций, когда длина очереди (количество требований в системе) пропорционально некоторому натуральному числу.

**Теорема 1.** Пусть

$$\inf_n \zeta_n = \zeta > 0 \quad (2.3)$$

и, кроме того, найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\int_0^\infty (\zeta \xi(t) - \varepsilon \lambda(t)) dt = +\infty. \quad (2.4)$$

Тогда процесс  $X(t)$  слабо эргодичен и имеет предельное среднее. Если при этом в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим  $\pi(t)$  и среднее  $\phi(t)$ , соответствующие начальному условию  $X(0) = 0$ , то при любом начальном условии вида  $X(0) = k$  справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq 4(1 + \varepsilon)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau} \quad (2.5)$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4(1 + \varepsilon)^k}{\varepsilon \omega} e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau}. \quad (2.6)$$

**Доказательство.** Полагая  $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ , получаем аналогично тому, как это проделано в [6], следующую систему:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (2.7)$$

в которой

$$B(t) = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \xi_1) & (\mu_2 - \lambda_0) & -\lambda_0 & -\lambda_0 & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2 + \xi_2) & \mu_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3 + \mu_3 + \xi_3) & \mu_4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)^T, \quad \mathbf{f}(t) = (\lambda_0(t), 0, 0, \dots)^T.$$

Обозначим оператор Коши линейной неоднородной системы (2.7) через  $V(t, z)$ , введем в рассмотрение матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & \cdots \\ 0 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

и пространство последовательностей  $\ell_{1D} = \{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$ , где  $d_i$  – пока не выбранные положительные числа.

Теперь рассматриваемый процесс можно исследовать таким же образом, как и в [6].

Положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) + \xi_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} \mu_k(t), \quad k \geq 0, \quad (2.9)$$

и

$$\alpha(t) = \inf_{k \geq 0} \alpha_k(t). \quad (2.10)$$

Тогда получаем

$$\gamma(B(t))_{1D} = \sup_{i \geq 0} \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \lambda_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_{i+1}(t) + \xi_{i+1}(t)) + \frac{d_{i-1}}{d_i} \mu_i(t) \right) = -\alpha(t). \quad (2.11)$$

Полагая теперь  $d_{-1} = d_0 = 1$ ,  $d_{k+1} = (1 + \varepsilon)d_k$ ,  $k \geq 0$ , получаем с учетом (2.11) следующую оценку:

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &\leq - \left( \zeta \xi(t) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (S\mu(t) - (1 + \varepsilon)\lambda(t)) \right) \\ &\leq - (\zeta \xi(t) - \varepsilon \lambda(t)) = -\alpha_*(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

причем из (2.3) вытекает, что  $\int_0^\infty \alpha_*(t) dt = +\infty$ . Теперь с учетом проведенного ранее (см., например, [8]) сравнения норм получаем слабую эргодичность процесса

и оценку

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 4e^{-\int_0^t (\zeta\xi(\tau) - \varepsilon\lambda(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \quad (2.13)$$

Выбирая теперь  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0) = \mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_k$ , получаем неравенство (2.5).

Рассматривая величину  $\omega = \inf_{k \geq 1} \frac{d_k}{k}$  и убеждаясь, что  $\omega = \inf_{k \geq 1} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k} > 0$ , получаем снова из сравнения норм существование предельного среднего и оценку

$$|E_{\mathbf{p}^*}(t) - E_{\mathbf{p}^{**}}(t)| \leq \frac{4}{\omega} e^{-\int_0^t (\zeta\xi(\tau) - \varepsilon\lambda(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \quad (2.14)$$

Для завершения доказательства достаточно выбрать снова  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0) = \mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_k$ .

**Замечание 1.** Пусть все интенсивности (поступления, обслуживания требований, катастроф) 1-периодичны. Тогда:

- 1) вместо условия (2.4) достаточно потребовать, чтобы  $\int_0^1 \xi(t) dt > 0$ ;
- 2) можно выбрать «особые» предельные характеристики, а именно существует 1-периодический предельный режим  $\pi(t)$  и соответствующее ему 1-периодическое предельное среднее  $\phi(t)$ ;
- 3) эти предельные характеристики можно приближенно построить, пользуясь методикой, разработанной в [8, 6], с использованием усеченного процесса и оценок скорости сходимости.

**Теорема 2.** Пусть при некотором  $\varepsilon > 0$  выполняется условие

$$\int_0^\infty (S\mu(t) - (1 + \varepsilon)\lambda(t)) dt = +\infty. \quad (2.15)$$

Тогда процесс  $X(t)$  слабо эргодичен и имеет предельное среднее. Если при этом в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим  $\pi(t)$  и

среднее  $\phi(t)$ , соответствующие начальному условию  $X(0) = 0$ , то при любом начальном условии вида  $X(0) = k$  справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq 4(1 + \varepsilon)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int_0^t \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(\tau) - (1+\varepsilon)\lambda(\tau)) d\tau} \quad (2.16)$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4(1 + \varepsilon)^k}{\varepsilon\omega} e^{-\int_0^t \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(\tau) - (1+\varepsilon)\lambda(\tau)) d\tau}. \quad (2.17)$$

**Доказательство** проводится так же, как в предыдущей теореме. При этом, строя то же вспомогательное пространство  $\ell_{1D}$ , вместо (2.13) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &\leq -\left(\zeta\xi(t) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(t) - (1+\varepsilon)\lambda(t))\right) \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(t) - (1+\varepsilon)\lambda(t)) = -\alpha_*(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

и далее оценки получаются тем же образом.

**Замечание 2.** Если все интенсивности (поступления, обслуживания требований, катастроф) 1-периодичны, то:

1) вместо условия (2.15) достаточно потребовать, чтобы  $\int_0^1 (S\mu(t) - \lambda(t)) dt > 0$ ;

2) можно выбрать «особые» предельные характеристики, а именно существует 1-периодический предельный режим  $\pi(t)$  и соответствующее ему 1-периодическое предельное среднее  $\phi(t)$ ;

3) эти предельные характеристики можно приближенно построить, пользуясь методикой, разработанной в [8, 6], с использованием усеченного процесса и оценок скорости сходимости.

Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда условия предыдущих теорем не выполняются.

**Теорема 3.** Пусть при некотором натуральном  $N$  выполняется условие

$$\inf_n \zeta_{nN} = \zeta > 0 \quad (2.19)$$

вместо (2.3). Пусть, кроме того, найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$\int_0^\infty g(t) dt = +\infty, \quad (2.20)$$

где

$$g(t) = \min(\zeta\xi(t) - \delta\lambda(t) - \delta S\mu(t), \lambda(t) - (1 + \delta)S\mu(t)). \quad (2.21)$$

Тогда процесс  $X(t)$  слабо эргодичен и имеет предельное среднее.

**Доказательство** проводится по той же схеме, что и в теореме 1. При этом вспомогательная последовательность  $\{d_k\}$  выбирается следующим образом:  $d_{-1} = d_0 = 1$ ,  $d_{k+1} = (1 + \varepsilon)^{-1}d_k$ , если  $k \neq iN - 1$ ,  $d_{k+1} = (1 + \varepsilon)^N d_k$  при  $k = iN - 1$ , где положительное число  $\varepsilon < \delta$  таково, что  $(1 + \varepsilon)^N - 1 < \delta$ . Тогда получаем

$$\alpha_k(t) \geq \lambda(t) + S\mu(t) + \zeta_{k+1}\xi(t) - S\mu(t)(1 + \varepsilon) - (1 + \varepsilon)^{-1}\lambda(t) \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(\lambda(t) - (1 + \varepsilon)S\mu(t)) \quad (2.22)$$

при  $k \neq iN - 1$  и

$$\alpha_k(t) \geq \zeta\xi(t) - \varepsilon S\mu(t) - ((1 + \varepsilon)^N - 1)\lambda(t) \quad (2.23)$$

при  $k = iN - 1$ .

Отсюда вытекает, что

$$\gamma(B(t))_{1D} \leq -g(t), \quad (2.24)$$

причем последовательность  $\{d_k\}$  построена так, что выполняется и условие  $\omega = \inf_{k \geq 1} \frac{d_k}{k} > 0$ . Отсюда и следует утверждение теоремы.

**Следствие 1.** Если при выполнении условий теоремы 3 в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим  $\pi(t)$  и среднее  $\phi(t)$ , соответствующие начальному условию  $X(0) = 0$ , то при любом начальном условии вида  $X(0) = k$  справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq \frac{4r_k}{d} e^{-\int_0^t G(\tau) d\tau} \quad (2.25)$$



и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4r_k}{d\omega} e^{-\int_0^t G(\tau) d\tau}, \quad (2.26)$$

где  $d = \min d_k$ ,  $r_k = \sum_{i \leq k-1} d_i$ ,  $a$

$$G(t) = \min \left( \zeta \xi(t) - \varepsilon S \mu(t) - \left( (1 + \varepsilon)^N - 1 \right) \lambda(t), \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (\lambda(t) - (1 + \varepsilon) S \mu(t)) \right) \geq g(t).$$

**Замечание 3.** В случае 1-периодических интенсивностей за счет более сложного выбора вспомогательной последовательности  $\{d_k\}$  условия теоремы можно существенно ослабить.

### 3 Пример

Рассмотрим систему обслуживания  $M(t)/M(t)/100$  с катастрофами в случае периодических интенсивностей в разных ситуациях, гарантирующих слабую эргодичность модели, и вычислим предельное среднее  $\phi(t)$ , а также асимптотику величины  $J_0(t)$  – вероятности того, что в момент  $t$  очередь пуста, то есть в системе обслуживания нет ни одного требования, и величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$ .

При вычислениях используется следствие 4 из работы [6], которое с учетом конкретной модели и зависимости интенсивностей катастроф от состояния выглядит следующим образом:

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1,  $X_n(t)$  – соответствующий усеченный процесс, а  $X(0) = X_n(0) = 0$ . Тогда при всех  $t \geq 0$  и любом  $n$  справедливы оценки

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_1 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D} \left( 4(1 + \varepsilon)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau} + 6Lw_n^1 t \right) \quad (3.27)$$

и

$$|\phi(t) - E_{0,n}(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D} \left( \frac{4(1+\varepsilon)^k}{\omega\varepsilon} e^{-\int_0^t (\zeta\xi(\tau) - \varepsilon\lambda(\tau)) d\tau} + 6Lw_n^2 t \right), \quad (3.28)$$

где  $L = \sup_{[0,1]} (\lambda(t) + S\mu(t) + M\xi(t))$ ,  $w_n^1 = \sup_{k \geq n} \frac{1}{d_k}$ ,  $w_n^2 = \sup_{k \geq n} \frac{k}{d_k}$  и  $E_{0,n} = E_k(t) = E\{X_n(t) | X_n(0) = 0\}$ , а  $\pi(t)$  – существующий 1-периодический предельный режим.

**Замечание 4.** Аналогичные оценки (с изменением первого слагаемого в скобках) получаются при выполнении условий теорем 2 и 3.

1. Выбираем вначале интенсивности следующим образом:  $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \sin 4\pi t$ ,  $\xi_n(t) = 100 + \sin 4\pi t$ ,  $n \geq 1$ . Тогда при  $\varepsilon = 0.4$  выполнены условия теоремы 1 и для построения предельных 1-периодических характеристик (с точностью до  $10^{-5}$ ) достаточно выбрать размерность усеченного процесса  $n = 100$  и построить нужные характеристики для усеченного процесса с нулевым начальным условием на отрезке [8, 9]. Соответствующие графики приведены на рисунках 1–3.

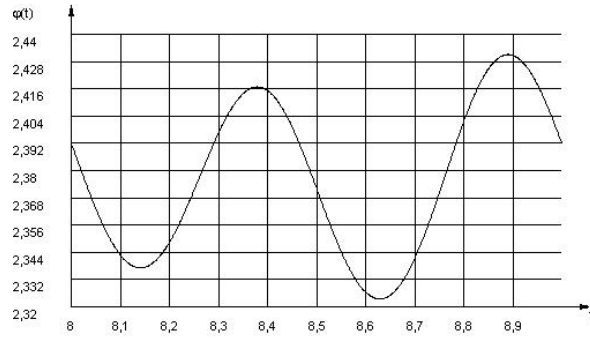
2. Выбирая теперь  $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 10 + \sin 4\pi t$ ,  $\xi_n(t) = \frac{2 + \sin 4\pi t}{n}$ , получаем выполнение условий теоремы 2 при  $\varepsilon = 3.0$ , при этом  $n = 65$ , а в качестве необходимого отрезка будет [1.5, 2.5], см. рисунки 4–6.

3. Если, наконец, взять  $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \sin 4\pi t$ ,  $\xi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 3k, \\ 153 + \sin 4\pi t, & \text{если } n = 3k \end{cases}$ , то выполнены условия теоремы 3, при этом  $\varepsilon = 0.15$ ,  $n = 250$ ,  $t \in [19, 20]$ , см. рисунки 7–9.

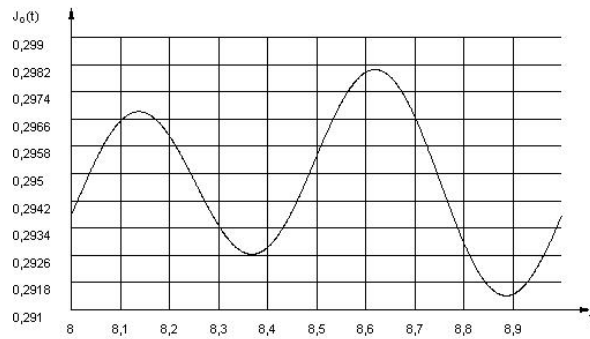
## Список литературы

- [1] Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M. On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347 .

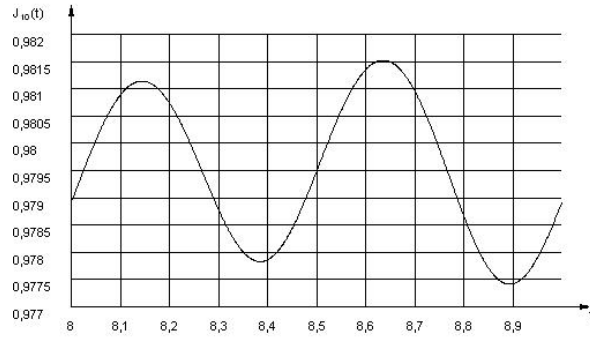
- [2] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* A note on birth-death processes with catastrophes // *Statist. Probab. Lett.*, 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.
- [3] *Van Doorn E. A., Zeifman A.* Extinction probability in a birth-death process with killing // *J. Appl. Probab.*, 2005. Vol. 42. P. 185–198.
- [4] *Krishna Kumar B., Arivudainambi D.* Transient solution of an M/M/1 queue with catastrophes // *Comput. Math. Appl.*, 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.
- [5] *Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V.* Some bounds for  $M(t)/M(t)/S$  queue with catastrophes // *Proceedings of SMCTools08*. Athens, Greece, 2008.
- [6] *Зейфман А.И., Сатин Я.А., Чегодаев А.В.* О нестационарных системах обслуживания с катастрофами // *Информатика и ее применения*, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 47–54.
- [7] *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // *Дифф. уравнения*, 1971. Т. 7. С. 1696–1698.
- [8] *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // *Queueing syst.*, 2006. Vol. 52. P. 139–151.
- [9] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. – М.: Элекс-КМ, 2008.



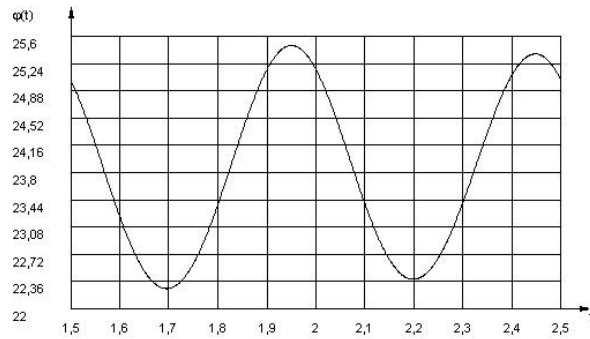
**Рис. 1** Случай 1, приближенное значение предельного среднего



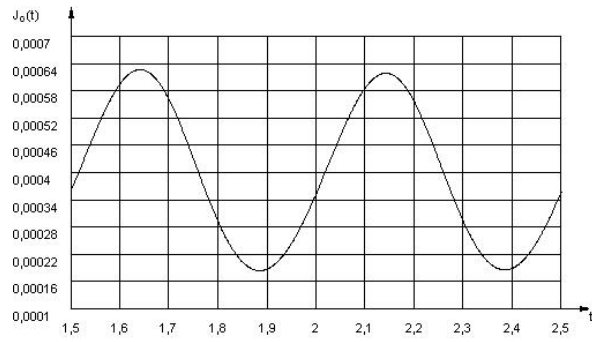
**Рис. 2** Случай 1, приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$



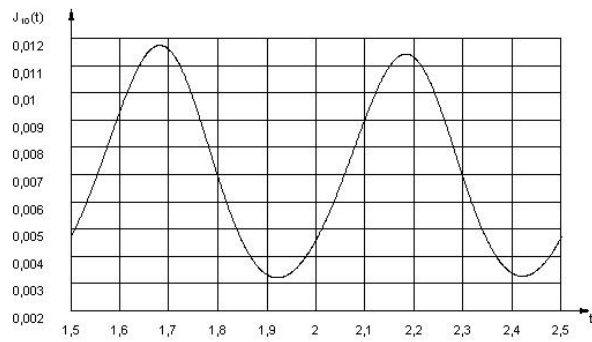
**Рис. 3** Случай 1, приближенное значение предельной величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$



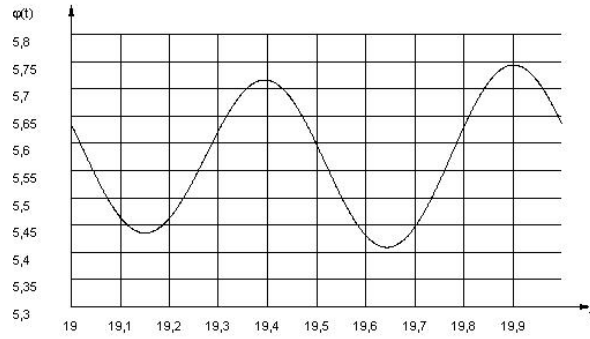
**Рис. 4** Случай 2, приближенное значение предельного среднего



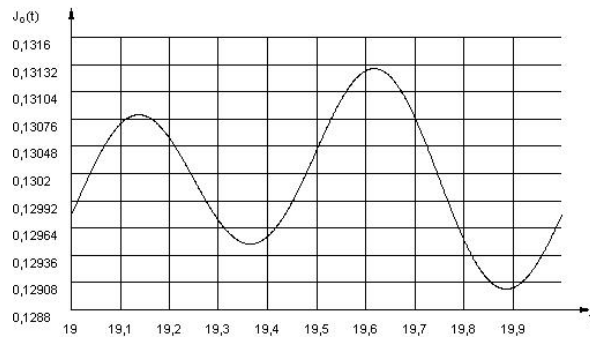
**Рис. 5** Случай 2, приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$



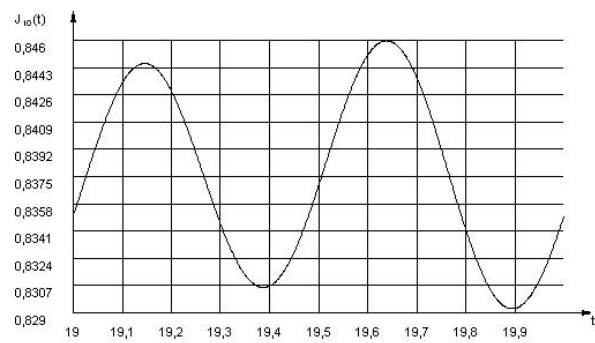
**Рис. 6** Случай 2, приближенное значение предельной величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$



**Рис. 7** Случай 3, приближенное значение предельного среднего



**Рис. 8** Случай 3, приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$



**Рис. 9** Случай 3, приближенное значение предельной величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$