Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами*

А. И. Зейфман[†], А. В. Коротышева [‡], Я. А. Сатин[§], С. Я. Шоргин, [¶]

Ключевые слова: Нестационарные системы обслуживания; марковские модели с катастрофами; устойчивость; оценки; предельные характеристики; аппроксимация.

Аннотация: Рассматриваются модели обслуживания, описываемые процессами рождения и гибели (ПРГ) с катастрофами. Получены оценки устойчивости различных характеристик таких систем. Рассмотрен пример конкретной системы обслуживания.

1 Введение

Системы массового обслуживания с катастрофами изучались во многих работах современных авторов, см., например, [3, 4, 5, 6, 11, 15, 17, 18, 19]. Вопросы, связанные с устойчивостью неоднородных марковских цепей с непрерывным временем, впервые исследованы одним из авторов в [12] и затем более детально для нестационарных процессов рождения и гибели (ПРГ) в работах [1, 13]. В настоящей заметке будет исследована устойчивость одного класса моделей, описываемых нестационарными ПРГ с катастрофами. Причем будет рассмотрен случай, когда интенсивность катастрофы не зависит от числа требований в системе и является существенной. Случай, когда устойчивость гарантируется за счет достаточно

*Исследование поддержано грантами РФФИ 08-07-00152 и 09-07-12032.

[†]Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики РАН и ИСЭРТ РАН, e-mail: a_zeifman@mail.ru

[‡]Вологодский государственный педагогический университет, e-mail: a_korotysheva@mail.ru

[§]Вологодский государственный педагогический университет, e-mail:yacovi@mail.ru

[¶]Институт проблем информатики РАН, e-mail: SShorgin@ipiran.ru

больших интенсивностей обслуживания, исследуется так же, как в работах [1, 13], а ситуация, в которой интенсивности катастроф зависят от числа требований, будет изучаться отдельно. Статья написана на основе материалов доклада, представленного на IV Международном семинаре "Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем"(зимняя сессия, Аоста, Италия, январь-февраль 2010 г.).

Пусть $X = X(t)$, $t \geq 0$, – ПРГ с катастрофами, а $\lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$ и $\xi(t)$ – интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Обозначим через $p_{ij}(s,t) = Pr\left\{X(t) = j \,|X(s) = i\right\}$, $i,j \geq 0$, $0 \leq s \leq t$, переходные вероятности процесса $X = X(t)$, а через $p_i(t) = Pr\left\{X(t) = i\right\}$ – его вероятности состояний.

При выполнении естественных дополнительных условий (см., например, [16]) прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dp_0}{dt} = -\left(\lambda_0(t) + \xi(t)\right) p_0 + \mu_1(t)p_1 + \xi(t), \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - \left(\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi(t)\right) p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1, \end{array} \right. \tag{1}$$

можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

в пространстве последовательностей l_1, где $\mathbf{g}(t) = \left(\xi(t), 0, 0, \ldots\right)^T$, $\mathbf{p}(t) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)^T$ – вектор-столбец вероятностей состояний, а $\mathbf{A}(t) = \left\{a_{ij}(t),\, t \geq 0\right\}$ – матрица, порождаемая системой (1), при этом элементы матрицы $\mathbf{A}(t)$ определяются по формулам

$$a_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \lambda_{i-1}\left(t\right), & \text{если} \quad j = i-1, \\ \mu_{i+1}\left(t\right), & \text{если} \quad j = i+1, \\ -\left(\lambda_i\left(t\right) + \mu_i\left(t\right) + \xi(t)\right), & \text{если} \quad j = i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{array} \right. \tag{3}$$

Далее предполагаем, что

$$\lambda_n\left(t\right) = \nu_n \lambda\left(t\right), \ \mu_n\left(t\right) = \eta_n \mu\left(t\right), \quad t \geq 0, \quad n \in E, \tag{4}$$

где $0 \leq \eta_n \leq M$, $0 \leq \nu_n \leq M$, а «базисные» функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\xi(t)$ локально интегрируемы на $[0; \infty)$ и (для простоты вычислений) ограничены, то есть

$$\lambda(t) + \mu(t) + \xi(t) \leq L < \infty \tag{5}$$

почти при всех $t \geq 0$, см. подробное рассмотрение в [14].

Обозначим через $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0, \ \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$ множество всех стохастических векторов.

Тогда

$$\|A(t)\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}(t)| \leq 2ML \tag{6}$$

почти при всех $t \geq 0$, а значит, задача Коши для уравнения (2) с начальным условием $\mathbf{p}(0)$ имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\, d\tau, \tag{7}$$

где $U(t,s)$ – оператор Коши уравнения (2). При этом если $\mathbf{p}(s) \in \Omega$, то и $\mathbf{p}(t) \in \Omega$ при любом $t \geq s$.

Рассмотрим теперь «возмущенный» ПРГ с катастрофами $\bar{X} = \bar{X}(t)$, $t \geq 0$, обозначая через $\bar{\lambda}_n(t)$, $\bar{\mu}_n(t)$ и $\bar{\xi}(t)$ его интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Введем обозначения:

$\hat{\lambda}_n(t) = \bar{\lambda}_n(t) - \lambda_n(t)$, $\hat{\mu}_n(t) = \bar{\mu}_n(t) - \mu_n(t)$, $\hat{\xi}(t) = \bar{\xi}(t) - \xi(t)$.

Для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть при всех n и почти всех $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\left|\hat{\lambda}_n(t)\right| \leq \varepsilon_1, \ |\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon_2, \ \left|\hat{\xi}(t)\right| \leq \varepsilon_3. \tag{8}$$

2 Устойчивость вектора состояний

Выпишем прямую систему Колмогорова, соответствующую возмущенному процессу,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t). \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t), \quad \hat{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{g}(t) - \bar{\mathbf{g}}(t).$$

Перепишем систему (9) в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = A(t)\bar{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{g}(t) - \hat{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) - \hat{\mathbf{g}}(t). \tag{10}$$

Получаем

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = U(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t U(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau - \int_0^t U(t,\tau)\ \left(\hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau) + \hat{\mathbf{g}}(\tau)\right)\,d\tau. \tag{12}$$

В этом параграфе возможно рассмотрение непосредственно по норме l_1. Пусть $\mathbf{p}(0) = \bar{\mathbf{p}}(0)$, тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \le \int_0^t \|U(t,\tau)\| \left(\|\hat{A}(\tau)\|\|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{g}}(\tau)\|\right)\,d\tau. \tag{13}$$

Имеем теперь

$$\|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| = 1, \quad \tau \ge 0, \tag{14}$$

и, значит,

$$\left(\|\hat{A}(\tau)\|\|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| + \|\bar{\mathbf{g}}(\tau)\|\right) \le (2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_3)+\varepsilon_3 = 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3). \tag{15}$$

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора $A(t)$ в пространстве l_1 (см. [17]), получаем

$$\gamma\left(A(t)\right)_1 = \sup_i \left(a_{ii}(t) + \sum_{j\ne i} |a_{ji}(t)|\right) = -\xi(t). \tag{16}$$

Тогда

$$\|U(t,s)\| \le e^{-\int\limits_s^t \xi(\tau)\,d\tau} \tag{17}$$

для всех $0 \le s \le t$, и получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного ПРГ с катастрофами для всех $t \ge 0$ справедлива следующая оценка:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \le 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\int_0^t e^{-\int\limits_{s_1}^t \xi(\tau)\,d\tau}\,ds_1. \tag{18}$$

Следствие 1. *Пусть $\xi(t) \geq \xi > 0$ почти при всех $t \geq 0$. Тогда вместо (18) получаем*

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\xi}. \tag{19}$$

Замечание 1. *Более точные оценки отклонения можно получить, ослабив условия малости возмущений и потребовав, чтобы вместо (8) выполнялись при всех n и почти всех $t \geq 0$ неравенства*

$$\left|\hat{\lambda}_n(t)\right| \leq \varepsilon_1 \xi(t), \ |\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon_2 \xi(t), \ \left|\hat{\xi}(t)\right| \leq \varepsilon_3 \xi(t), \tag{20}$$

а кроме того, чтобы было выполнено естественное условие существенности катастроф

$$\int_0^\infty \xi(\tau)\, d\tau = +\infty, \tag{21}$$

см. подробнее [13].

3 Оценка для среднего

Обозначим через $E_k(t) = E\left\{X(t)\,|X(0) = k\right\}$ математическое ожидание процесса в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k. Иногда будет встречаться также несколько более общее выражение $E_{\mathbf{p}}(t)$ – это математическое ожидание процесса в момент t при начальном распределении вероятностей состояний $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$.

Соответствующие выражения для возмущенного процесса будем обозначать через $\bar{E}_k(t) = E\left\{\bar{X}(t)\,\middle|\bar{X}(0) = k\right\}$ и $\bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)$.

Легко видеть, что тогда $\left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \leq \sum_k k|p_k(t) - \bar{p}_k(t)|$. Поэтому в качестве основного в этом пункте выберем пространство последовательностей $l_{1E} = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \ldots)\} \in l_1$ таких, что $\|\mathbf{z}\|_{1E} = \sum_k k|p_k| < \infty$. К сожалению, в этой и связанных с ней нормах оценку типа (14) непосредственно получить не удается, поэтому приходится выбирать другой способ дальнейших рассуждений.

Для получения более простых оценок будем предполагать, что найдутся $\rho \in (0;1)$ и натуральное k такие, что для всех n, t выполнено условие $\frac{1}{k}\lambda_n(t) \leq (1-\rho)\xi(t)$.

Перепишем исходную систему (2)для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{A}(t)\mathbf{p}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t) + \hat{A}(t)\mathbf{p}(t) + \hat{\mathbf{g}}(t). \tag{22}$$

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = \bar{U}(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{U}(t,\tau)\bar{\mathbf{g}}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \bar{U}(t,\tau)\,\left(\hat{A}(\tau)\mathbf{p}(\tau) + \hat{\mathbf{g}}(\tau)\right)\,d\tau \tag{23}$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{U}(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{U}(t,\tau)\bar{\mathbf{g}}(\tau)\,d\tau. \tag{24}$$

А тогда в *любой* норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \le \int_0^t \|\bar{U}(t,\tau)\|\left(\|\hat{A}(\tau)\|\|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{g}}(\tau)\|\right)\,d\tau. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$D_k = diag\left(\underbrace{k, k, k, \dots, k}_{k+1}, k+1, k+2, \dots\right) \tag{26}$$

и соответствующее пространство последовательностей $l_{1k} = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)\}$ таких, что $\|\mathbf{z}\|_{1k} = \|D_k\mathbf{z}\|_1 < \infty$. Тогда, очевидно, при любом целом неотрицательном k имеем $\|\mathbf{z}\|_{1E} \le \|\mathbf{z}\|_{1k}$.

Оценивая логарифмическую норму $\gamma(A(t))_{1k}$, получаем

$$\gamma(A(t))_{1k} = \gamma(D_k A(t) D_k^{-1})_1 \le \frac{M}{k}\lambda(t) - \xi(t) \le -\rho\xi(t), \tag{27}$$

поскольку сумма по каждому из столбцов с номерами $0, 1, \dots, k-1$ равна $-\xi(t)$, а если номер столба $n \ge k$, то сумма по этому столбцу есть $\frac{n+1}{n}\lambda_n(t) - (\lambda_n(t) + \mu_n(t) + \xi(t)) + \frac{n-1}{n}\mu_n(t) \le \frac{1}{n}\lambda_n(t) - \xi(t) \le \frac{M}{k}\lambda(t) - \xi(t)$.

Далее

$$\|\hat{A}(t)\|_{1k} = \|D_k\hat{A}(t)D_k^{-1}\|_1 \le \frac{2k+1}{k}\varepsilon_1 + \frac{2k-1}{k}\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \le 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \tag{28}$$

А тогда

$$\gamma(\bar{A}(t))_{1k} \le \gamma(D_k A(t) D_k^{-1})_1 + \|\hat{A}(t)\|_{1k} \le -\rho\xi(t) + 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \tag{29}$$

Оценим теперь

$$\|\mathbf{p}(t)\|_{1k} \le \|U(t)\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \int\limits_0^t \|U(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau\|_{1k} \le$$

$$\le e^{\int\limits_0^t (-\rho\xi(u))\,du}\|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + k\int\limits_0^t \xi(\tau)e^{\int\limits_\tau^t (-\rho\xi(u))\,du}\,d\tau \le \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \frac{k}{\rho} < \infty \quad (30)$$

при любом $\mathbf{p}(0)$, поскольку $\|\mathbf{g}(\tau)\|_{1k} = k\xi(\tau)$.

Теперь с учетом (25) имеем

$$\left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)\right| \le \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1k} \le$$

$$\le \left((3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\left(\|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \frac{k}{\rho}\right) + k\varepsilon_3\right)\int_0^t e^{-\int_\tau^t(\rho\xi(u) - 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,du}\,d\tau. (31)$$

Теорема 2. *При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного ПРГ с катастрофами для всех $t \ge 0$ справедлива оценка устойчивости среднего (31).*

Следствие 2. *Пусть $\xi(t) \ge \xi > 0$ почти при всех $t \ge 0$, а $X(0) = 0$. Тогда вместо (31) получаем*

$$\left|E_0(t) - \bar{E}_0(t)\right| \le \left((3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\frac{k}{\rho} + k\varepsilon_3\right)(\rho\xi - 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^{-1}. \quad (32)$$

Замечание 2. *Более точные оценки отклонения можно получить, ослабив условия малости возмущений, см. (20) и (21).*

4 Пример

В современных моделях, связанных с финансовой математикой, рассматриваются марковские цепи и их устойчивость, см. [2, 7, 10].

Рассмотрим здесь простейшую нестационарную модель, описывающую число клиентов страховой компании.

А именно пусть вначале $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t) = 5 + 5\sin 2\pi t$, $\mu_n(t) = \mu(t) = 5 + 5\cos 2\pi t$, $\xi(t) = 1 + \sin 2\pi t, n \ge 1$, а все $\varepsilon_i = \varepsilon$.

Применяя методы, описанные в наших предыдущих работах, и строя последовательность аппроксимирующих процессов так, как это предложено в [20], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Справедлива следующая оценка:*
при $X(0) = X_n(0) = 0$

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1 \leq 2e^{-t} + \frac{42e^{8t}}{2^{N+3}} \tag{33}$$

при всех $t \geq 0$ *и любом* N.

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1 \leq \|\pi(t) - \mathbf{p}(t)\|_1 + \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1.$$

Воспользуемся вначале неравенством

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 \leq e^{\int\limits_0^t \gamma(A(\tau))_1 d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1 \leq$$

$$\leq e^{-\int\limits_0^t (1+\sin 2\pi t) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1 \leq e^{-t} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1.$$

Теперь, выбирая $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$, $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$, получаем первое слагаемое правой части. Далее рассмотрим $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1$ для получения второго слагаемого. Будем отождествлять векторы $(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)^T$ и $(x_1, \ldots, x_N)^T$. Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_N(t)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t) + (A(t) - A_N(t))\,\mathbf{p}, \tag{34}$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p_N}}{dt} = A_N(t)\mathbf{p_N} + \mathbf{g}(t) \tag{35}$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_N(t) = U_N(t)\mathbf{p}(0) + \int\limits_0^t U_N(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau \qquad (36)$$

при $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_N(0)$ и

$$\mathbf{p}(t) = U_N\,(t)\,\mathbf{p}(0) + \int\limits_0^t U_N(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t U_N\,(t,\tau)\,(A(\tau) - A_N(\tau))\,\mathbf{p}(\tau)\,d\tau. \qquad (37)$$

Тогда получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \le \int\limits_0^t \|U_N(t,\tau)\|\|(A(\tau) - A_N(\tau))\mathbf{p}(\tau)\|d\tau. \qquad (38)$$

Далее $\|U_N(t,\tau)\|_1 = 1$, а

$$(A - A_N)\,\mathbf{p} = (0,\ldots,0,-\lambda_N p_N + \mu_{N+1}p_{N+1}, \lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi)\,p_{N+1} + \mu_{N+2}p_{N+2},\ldots) \qquad (39)$$

и

$$\|(A - A_N)\mathbf{p}\| \le \|A\| \sum_{n\ge N} p_k = (21 + 11\sin 2\pi t + 10\cos 2\pi t) \sum_{n\ge N} p_n \le 42 \sum_{n\ge N} p_n \qquad (40)$$

С другой стороны,

$$\sum_{n\ge 0} \frac{d(2^n p_n)}{dt} = \sum_{n\ge 0} 2^n(2\lambda_n - (\lambda_n + \mu_n + \xi) + \frac{\mu_n}{2})p_n \le \sum_{n\ge 0} 2^n(1.5 + 4\sin 2\pi t - 2.5\cos 2\pi t)p_n \qquad (41)$$

и, значит,

$$\frac{d(\sum_{n\ge 0} 2^n p_n)}{dt} \le 8 \sum_{n\ge 0} 2^n p_n. \qquad (42)$$

Отсюда

$$\sum_{n\ge 0} 2^n p_n(t) \le e^{8t} \sum_{n\ge 0} 2^n p_n(0) = e^{8t} \qquad (43)$$

и

$$2^N \sum_{n\ge N} p_n \le \sum_{n\ge N} 2^n p_n \le e^{8t}, \qquad (44)$$

а тогда

$$\sum_{n\geq N} p_n \leq \frac{e^{8t}}{2^N} \tag{45}$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \int\limits_0^t (\frac{42e^{8t}}{2^N}) d\tau \leq \frac{42e^{8t}}{2^{N+3}}, \tag{46}$$

откуда получается второе слагаемое.

Теперь несложно проверить, что для построения предельного режима для невозмущенного процесса с точностью 10^{-8} достаточно выбрать $N = 273$, $t \in [20, 21]$.

Теорема 4. *При $X(0) = X_N(0) = 0$ справедлива оценка*

$$|\phi(t) - E_{0,N}(t)| \leq \frac{ke^{-\rho t}}{\rho} + \frac{22e^{8t}}{2^N} \tag{47}$$

при всех $t \geq 0$ и любом $N \geq k$.

Доказательство. Первое слагаемое правой части вытекает из неравенства

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{1E} \leq \|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{1k} \leq \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho t}, \tag{48}$$

если предварительно выбрать $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$, $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$ и воспользоваться рассуждениями теоремы 2.

Оценим $\|\pi(0)\|_{1k}$. Имеем с учетом 1−периодичности

$$\|\pi(0)\|_{1k} \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \|\pi(t)\|_{1k} \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho\int_0^t \xi(u)\,du} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{1k} e^{-\rho\int_\tau^t \xi(u)\,du} d\tau \right) \leq$$
$$\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho t} + k\int_0^t \xi(\tau) e^{-\rho\int_\tau^t \xi(u)\,du} d\tau \right) \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho\int_0^t \xi(u)\,du}) \right) \leq \frac{k}{\rho}. \tag{49}$$

Теперь рассмотрим $|E_0(t) - E_{0,N}(t)|$ для получения второго слагаемого.

В любой норме выполняется

$$\|\mathbf{p}(t)-\mathbf{p}_N(t)\| = \left\| \int_0^t U_N(t,\tau)\left(A(\tau)-A_N(\tau)\right)\mathbf{p}(\tau)\,d\tau \right\|. \qquad (50)$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_N = \begin{pmatrix} u^N_{00} & . & . & u^N_{0N} & 0 & 0 & \cdots \\ u^N_{10} & . & . & u^N_{1N} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \\ u^N_{N0} & . & . & u^N_{NN} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \end{pmatrix}. \qquad (51)$$

Тогда

$$(A-A_N)\,\mathbf{p} = \left(0,\ldots,0,-\lambda_N p_N+\mu_{N+1}p_{N+1},\lambda_N p_N-\left(\lambda_{N+1}+\mu_{N+1}+\xi\right)p_{N+1}+\mu_{N+2}p_{N+2},\ldots\right) \qquad (52)$$

и, следовательно,

$$U_N\,(A-A_N)\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} u^N_{0N}\left(-\lambda_N p_N+\mu_{N+1}p_{N+1}\right) \\ u^N_{1N}\left(-\lambda_N p_N+\mu_{N+1}p_{N+1}\right) \\ \vdots \\ u^N_{NN}\left(-\lambda_N p_N+\mu_{N+1}p_{N+1}\right) \\ \lambda_N p_N-\left(\lambda_{N+1}+\mu_{N+1}+\xi\right)p_{N+1}+\mu_{N+2}p_{N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \qquad (53)$$

С учетом неравенств $u^N_{ij}(t,\tau)\geq 0$ (при всех i,j,t,τ) и равенств $\sum_i u^N_{ij}(t,\tau) = 1$ (при всех j,t,τ) получаем оценку

$$\|U_N(A-A_N)p\|_{1E} = |-\lambda_N p_N+\mu_{N+1}p_{N+1}|\sum_{n\leq N} n u^N_{nN} +$$

$$+\sum_{n\geq N}(n+1)|\lambda_n p_n-(\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}+\xi)p_{n+1}+\mu_{n+2}p_{n+2}| \leq$$

$$\leq (2\lambda+2\mu+\xi)\left(\sum_{n\geq N} n p_n+\sum_{n\geq N} p_n\right).$$

Первое слагаемое уже оценено: $\sum_{n\geq N} p_n \leq \frac{e^{8t}}{2^N}$.

Рассмотрим первое слагаемое и оценим его аналогичным способом, учитывая, что $2\lambda(t)-\mu(t)\leq 25$,

$$\frac{d(\sum_{n\geq 1} np_n)}{dt} \leq \lambda(t)p_0 + (\lambda(t)-\mu(t))\sum_{n\geq 1} p_n - \xi(t)\sum_{n\geq 1} np_n \leq (\lambda(t)-\mu(t))\frac{e^{8t}}{2^N} + \lambda(t)\frac{e^{8t}}{2^N} \leq \frac{25e^{8t}}{2^N}. \tag{54}$$

Тогда

$$\|U_N(A-A_N)p\|_{1E} \leq (2\lambda(t)+2\mu(t)+\xi(t))\frac{e^{8t}}{2^N}(\frac{25}{8}+1) \tag{55}$$

и получаем

$$|E_0(t)-E_{0,n}(t)| \leq \frac{174}{2^N}\int\limits_0^t e^{8\tau}d\tau \leq \frac{22e^{8t}}{2^N}. \tag{56}$$

Для построения предельного среднего невозмущенного процесса с точностью 10^{-8} выбираем $N=341$, $t\in[26,27]$, положив при этом
$\rho=0.9; k=50$.

Далее, в оценках устойчивости (18) и (31) теорем 1 и 2 получаем, выбирая $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon$,

$$\|\mathbf{p}(t)-\bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 6\varepsilon\int_0^t e^{-\int_\tau^t \xi(u)\,du}d\tau \leq 6\varepsilon e^{\frac{1}{\pi}} \tag{57}$$

и

$$\left|E_{\mathbf{p}}(t)-\bar{E}_{\mathbf{p}}(t)\right| \leq \left(\frac{6\varepsilon k}{\rho}+k\varepsilon\right)\int_0^t e^{-\int_\tau^t (\rho\xi(u)-6\varepsilon))\,du}d\tau \leq \frac{\varepsilon k(\rho+6)}{\rho(\rho-6\varepsilon)}e^{\frac{\rho}{\pi}} \tag{58}$$

соответственно.

Пусть теперь при тех же интенсивностях поступления и обслуживания клиентов $\lambda_{n-1}(t)=\lambda(t)=5+5\sin 2\pi t$, $\mu_n(t)=\mu(t)=5+5\cos 2\pi t$ интенсивность катастрофы $\xi(t)=2+2\sin 2\pi t$ вдвое больше.

Тогда тем же образом проверяется, что для получения требуемой точности предельного режима достаточно взять $N=127$, $t\in[10,11]$, а для построения предельного среднего – $N=155$, $t\in[13,14]$. При этом выписанные оценки устойчивости заведомо также выполнены.

Интересно сравнить построенные ниже предельные характеристики рассмотренных примеров.

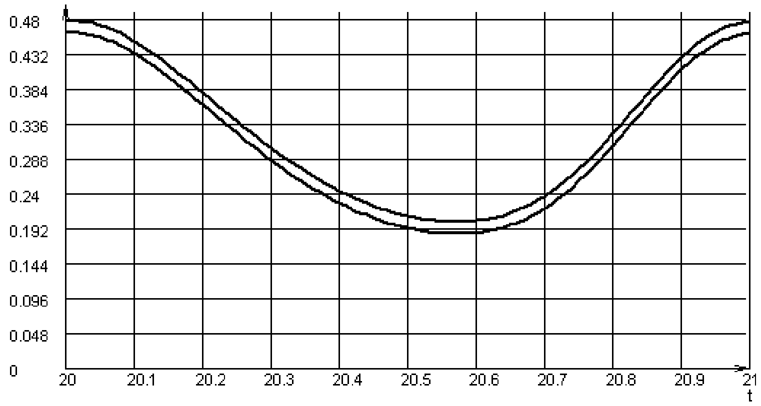

Рис. 1: Случай 1, приближенное значение предельной величины $J_0(t) = \Pr\left(\bar{X}(t) = 0\right)$. Среднее значение по периоду приближенно равно 0.319

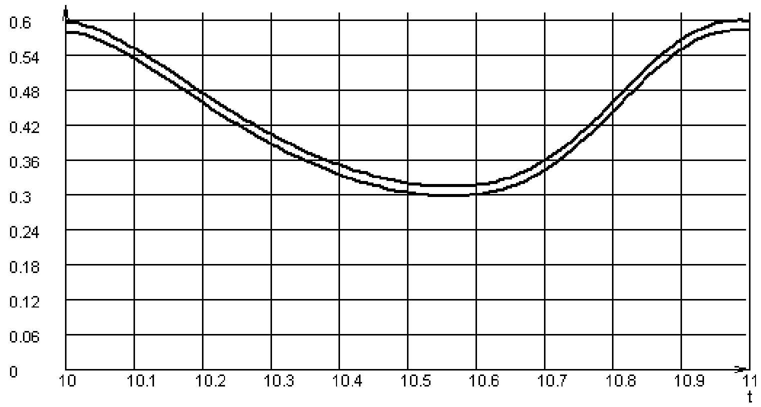

Рис. 2: Случай 2, приближенное значение предельной величины $J_0(t) = \Pr\left(\bar{X}(t) = 0\right)$. Среднее значение по периоду приближенно равно 0.433

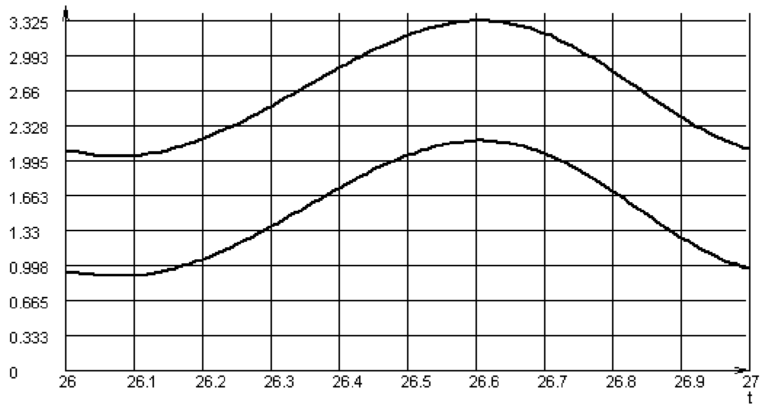

Рис. 3: Случай 1, приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса. Среднее значение по периоду – оно же двойное среднее – приближенно равно 2.100

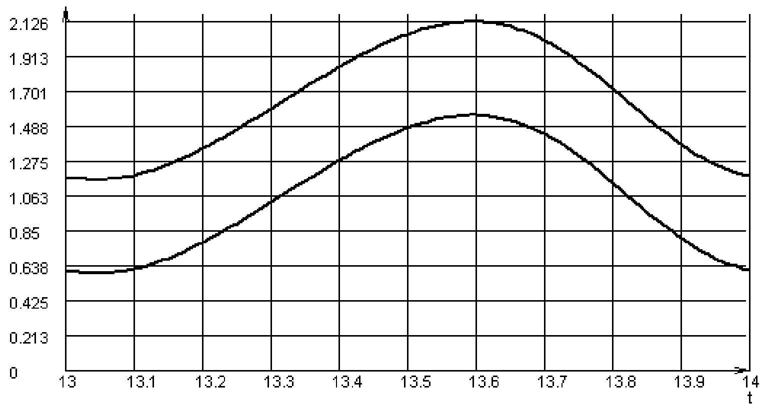

Рис. 4: Случай 2, приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса. Среднее значение по периоду – оно же двойное среднее – приближенно равно 1.357

Список литературы

[1] *Андреев Д., Елесин М., Кузнецов А., Крылов Е., Зейфман А.* Эргодичность и устойчивость нестационарных систем обслуживания // Теория вероятностей и математическая статистика, 2003. Т. 68. С. 1–11.

[2] *Ching W.-K., Ng M. K.* Markov chains: models, algorithms and applications. International Series in Operations Research & Management Science 83.- New York, NY: Springer, 2006.

[3] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347.

[4] D̂i Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M. A note on birth-death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett., 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.

[5] *Dudin A., Nishimura S.* A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // J. Appl. Probab., 1999. Vol. 36. P. 868–881.

[6] *Dudin A., Karolik A.* BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Perform. Eval., 2001. Vol. 45. P. 19–32.

[7] *Enikeeva F., Kalashnikov V., Rusaitite D.* Continuity Estimates for Ruin Probabilities // Scand. Actuarial J., 2001. No. 1. P. 18–39.

[8] *Granovsky B., Zeifman A.* The N-limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains // Appl. Stoch. Models in Business and Industry, 2000. Vol. 16. P. 235–248.

[9] *Granovsky B., Zeifman A.* Nonstationary queues: Estimation of the rate of convergence // Queueing Syst., 2004. Vol. 46. P. 363–388.

[10] *Islam M. A.* A Birth-Death Process Approach to Constructing Multistate Life Tables // Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series), 2003. Vol. 26. P. 101–108.

[11] *Krishna Kumar B., Arivudainambi D.* Transient solution of an $M/M/1$ queue with catastrophes // Comput. Math. Appl., 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.

[12] *Zeifman A. I.* Stability for contionuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math., 1985. Vol. 1155. P. 401–414.

[13] *Zeifman A.* Stability of birth and death processes // Journal of Mathematical Sciences, 1998. Vol. 91. P. 3023–3031.

[14] *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing Syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.

[15] *Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V.* Some bounds for $M(t)/M(t)/S$ queue with catastrophes // Proceedings of the 4th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. Athens, Greece, October 20–24, 2008.

[16] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. – М.: Элекс-КМ, 2008.

[17] *Зейфман А. И., Сатин Я. А., Чегодаев А. В.* О нестационарных системах обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 47–54.

[18] *Зейфман А. И., Сатин Я. А., Коротышева А. В., Терешина Н. А.* О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 16–22.

[19] *Zeifman A., Satin Ya., Shorgin S., Bening V.* On $M_n(t)/M_n(t)/S$ queues with catastrophes // Proceedings of the 4th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. Pisa, Italy October 19 - 23, 2009.

[20] *Зейфман А.И.* О нестационарной модели Эрланга // Автоматика и телемеханика, 2009. Вып. 12. С. 71–80.

Keywords: Nonstationary queues; Markovian models with catastrophes; stability; bounds; limiting characteristics; approximations.

Аннотация: Рассматриваются модели обслуживания, описываемые процессами рождения и гибели (ПРГ) с катастрофами. Получены оценки устойчивости различных характеристик таких систем. Рассмотрен пример конкретной системы обслуживания.

We consider nonstationary birth and death processes (BDPs) with catastrophes. The bounds of stability for some characteristics of such systems are obtained. We also consider a queueing example.

Сведения об авторах:

Зейфман Александр Израилевич (1954 г. р.), доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета, старший научный сотрудник ИПИ РАН, ведущий научный сотрудник ВНКЦ ЦЭМИ РАН.

Zeifman Alexander I. (b. 1954), doctor of science in physics and mathematics, professor, dean of the faculty of applied mathematics and computer technologies, Vologda State Pedagogical University, senior researcher, Institute of Informatics Problems RAS, leading researcher, VSCC CEMI RAS.

Коротышева Анна Владимировна(1988 г. р.), аспирантка факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета.

Korotysheva Anna V. (b. 1988), PhD student, faculty of applied mathematics and computer technologies, Vologda State Pedagogical University.

Сатин Яков Александрович (1978 г. р.), кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа Вологодского государственного педагогического университета.

Satin Yakov A. (b. 1978), candidate of of science in physics and mathematics, senior lecturer, Vologda State Pedagogical University.

Шоргин Сергей Яковлевич (1952 г. р.), доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора ИПИ РАН.

Shorgin Sergey Ya. (b. 1952), doctor of science in physics and mathematics, professor, deputy director, Institute of Informatics Problems RAS.