Оценки устойчивости для некоторых систем обслуживания с катастрофами*

А. И. Зейфман[†], А. В. Коротышева, [‡]Т. Л. Панфилова,[§]С. Я. Шоргин [¶]

Аннотация: Рассматриваются модели обслуживания, описываемые марковскими цепями с непрерывным временем в случае наличия катастроф. Получены оценки устойчивости различных характеристик таких систем. Рассмотрен пример конкретной системы обслуживания.

Ключевые слова: нестационарные системы обслуживания; марковские модели с катастрофами; оценки устойчивости; аппроксимация предельных характеристик

1 Введение

Системы массового обслуживания с катастрофами (СМО с катастрофическими сбоями, queues with disasters, queues with catastrophes) в разных ситуациях и при разных предположениях изучались во многих работах, см., например, [2, 3], [5]-[8], [14], [16]-[18].

Устойчивость нестационарных марковских цепей с непрерывным временем изучалась начиная с [10], затем в работах [1, 12], а для систем обслуживания, описываемых нестационарными ПРГ с катастрофами в случае, когда интенсивность катастрофы не зависит от числа требований

*Исследование поддержано грантами РФФИ 11-07-00112-а и 11-01-12026-офи-м.

[†]Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики Российской академии наук, Институт социально-экономического развития территорий Российской академии наук, a_zeifman@mail.ru

[‡]Вологодский государственный педагогический университет, a_korotysheva@mail.ru

[§]Вологодский государственный педагогический университет, ptl-70@mail.ru

[¶]Институт проблем информатики Российской академии наук, SShorgin@ipiran.ru

в системе и является существенной, рассмотрена в нашей предыдущей работе [19].

Здесь будет изучена более общая ситуация системы обслуживания, число требований в которой описывается марковской цепью с непрерывным временем и дискретным пространством состояний в той ситуации, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе, но являются существенными.

Пусть $X = X(t)$, $t \geq 0$, – число требований в системе обслуживания.

Обозначим через $p_{ij}(s,t) = Pr\left\{X(t) = j\left|X(s) = i\right.\right\}$, $i, j \geq 0$, $0 \leq s \leq t$, переходные вероятности процесса $X = X(t)$, а через $p_i(t) = Pr\left\{X(t) = i\right\}$ – его вероятности состояний, через $\xi_i(t)$ интенсивность катастрофы при наличии i требований в системе, через $a_{i+k,i}(t)$ интенсивность поступления k требований в систему обслуживания, в которой уже есть i требований, и наконец, через $a_{i-k,i}(t)$ интенсивность обслуживания k требований в системе обслуживания, в которой имеется i требований.

Тогда при выполнении естественных дополнительных условий (см., например, [15]) прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dp_0}{dt} = a_{00}(t)p_0 + \sum_{i\geq 1}\left(a_{0i}(t) + \xi_i(t)\right)p_i, \\ \frac{dp_k}{dt} = \left(a_{kk}(t) + \xi_k(t)\right)p_k + \sum_{i\neq k} a_{ki}(t)p_i, k \geq 1, \end{array} \right. \tag{1}$$

можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A\left(t\right)\mathbf{p} \tag{2}$$

в пространстве последовательностей l_1, где $\mathbf{p}(t) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)^T$ – вектор-столбец вероятностей состояний, а операторная функция $A(t)$ локально интегрируема на $[0, \infty)$ и ограничена почти при всех $t \geq 0$, см. подробное рассмотрение в [13]. Обозначим через $\Omega = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \geq 0,\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$ множество всех стохастических векторов. Тогда

$$\|A(t)\|_1 = 2\sup_i\left(|a_{ii}(t)| + \xi_i(t)\right) < \infty \tag{3}$$

почти при всех $t \geq 0$, а значит, задача Коши для уравнения (2) с начальным условием $\mathbf{p}(0)$ имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0), \tag{4}$$

где $U(t,s)$ – оператор Коши уравнения (2). При этом если $\mathbf{p}(s) \in \Omega$, то и $\mathbf{p}(t) \in \Omega$ при любом $t \geq s$.

Рассмотрим теперь «возмущенный» процесс обслуживания $\bar{X} = \bar{X}(t)$, $t \geq 0$, обозначая все его соответствующие характеристики так же, как и у невозмущенного процесса, с дополнительной верхней чертой. Положим $\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t)$ и для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть почти при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left|\hat{A}(t)\right| \leq \varepsilon. \tag{5}$$

2 Оценки для вектора состояний

Теорема 1. *Пусть $\xi_i(t) \geq \xi(t) \geq b > 0$ при всех $i \geq 0$ и почти всех $t \geq 0$. Тогда при любых начальных условиях $\mathbf{p}(0)$ и $\bar{\mathbf{p}}(0)$ справедлива следующая оценка устойчивости:*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b}. \tag{6}$$

Доказательство. Перепишем первое уравнение системы (1) в следующем виде:

$$\frac{dp_0}{dt} = (a_{00}(t) - \xi(t))\, p_0 + \sum_{i\geq 1} (a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t))\, p_i + \xi(t). \tag{7}$$

Теперь уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = B\,(t)\,\mathbf{p} + \mathbf{f}(t), \tag{8}$$

причем матрица $B\,(t)$ отличается только первой строкой очевидным образом от матрицы $A\,(t)$, а $\mathbf{f}(t) = (\xi(t), 0, \ldots)^T$.

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = V(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t V(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

где $V(t,s)$ – оператор Коши уравнения (9).

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора $B(t)$ в пространстве l_1 (см., например, подробное рассмотрение в [4, 11, 15]), получаем

$$\gamma\left(B(t)\right)_1 = \max\left(a_{00}(t) - \xi(t) + \sum_{i\geq 1} a_{i0}(t), \right. \tag{10}$$

$$\left.\sup_{i\geq 1}\left(a_{ii}(t) - \xi_i(t) + a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t) + \sum_{j\neq i, j\geq 1} a_{ji}(t)\right)\right) = -\xi(t).$$

Тогда

$$\|V(t,s)\| \leq e^{-\int\limits_s^t \xi(\tau)\,d\tau} \tag{11}$$

для всех $0 \leq s \leq t$.

А следовательно, при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s) \in \Omega$, $\mathbf{p}^{**}(s) \in \Omega$ и любых $s \geq 0$, $t \geq s$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \leq e^{-\int\limits_s^t \xi(\tau)\,d\tau}\|\mathbf{p}^*(s)-\mathbf{p}^{**}(s)\| \leq 2e^{-\int\limits_s^t \xi(\tau)\,d\tau} \leq 2e^{-b(t-s)}. \tag{12}$$

Теперь можно слегка модифицировать подход, предложенный в [9].

Положим

$$\begin{array}{c}\beta(t,s) = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1, \sum v_i=0} \|U(t)\mathbf{v}\| = \\ \frac{1}{2}\sup_{i,j}\sum_k |p_{ik}(t,s) - p_{jk}(t,s)|.\end{array} \tag{13}$$

Тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \beta(t,s)\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + \int_s^t \|\hat{A}(u)\|\beta(u,s)du, \tag{14}$$

причем

$$\beta(t,s) \leq 1, \quad \beta(t,s) \leq \frac{ce^{-b(t-s)}}{2},\ 0 \leq s \leq t, \tag{15}$$

где c – константа, принимающая в (12) значение 2.

В результате (при произвольном $c \geq 2$) получаем неравенство

$$\begin{array}{c}\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \\ \left\{\begin{array}{c}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, \quad 0 < t < b^{-1}\ln\frac{c}{2}, \\ b^{-1}(\ln\frac{c}{2} + 1 - ce^{-b(t-s)})\varepsilon + \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \\ t \geq b^{-1}\ln\frac{c}{2}.\end{array}\right.\end{array} \tag{16}$$

Значит, в рассматриваемой ситуации (при $c = 2$) из (16) при всех $t \geq s$ вытекает оценка

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq b^{-1}(1 - 2e^{-b(t-s)})\varepsilon + e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \qquad (17)$$

из которой и следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть все интенсивности 1-периодичны, $\xi_i(t) \geq \xi(t)$ при всех $i \geq 0$ и почти всех $t \in [0,1]$, а $\int_0^1 \xi(t)\,dt = \theta > 0$. Тогда для любых начальных условий $\mathbf{p}(0)$ и $\bar{\mathbf{p}}(0)$ справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon\,(1+\theta)}{\theta}. \qquad (18)$$

Для доказательства отметим, что теперь вместо (12) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 2e^{-\int\limits_s^t \xi(\tau)\,d\tau} \leq 2e^{\theta}e^{-\theta(t-s)} \qquad (19)$$

и, следовательно, из (16) вытекает при $t \geq 1$ неравенство

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \theta^{-1}(\theta + 1 - 2e^{\theta}e^{-\theta(t-s)})\varepsilon + e^{\theta}e^{-\theta(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \quad (20)$$

а с ним и требуемая оценка.

Замечание 1. *Отметим, что выписанные в теоремах 1, 2 оценки устойчивости справедливы, разумеется, и в случае конечного пространства состояний.*

3 Оценки для среднего

Обозначим через $E_k(t) = E\{X(t)\,|X(0) = k\}$ математическое ожидание процесса в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k, а через $E_{\mathbf{p}}(t)$ обозначим математическое ожидание процесса в момент t при начальном распределении вероятностей состояний $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$.

Легко видеть, что тогда $\left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \leq \sum_k k|p_k(t) - \bar{p}_k(t)|$, а значит, если пространство состояний системы конечно (общее чмсло требований в системе обслуживания не превосходит $S < \infty$), то $\left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \leq S\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|$.

А тогда из теорем 1, 2 сразу вытекают соответствующие оценки устойчивости средних:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \leq \frac{S\varepsilon}{b} \tag{21}$$

и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \leq \frac{S\varepsilon\,(1+\theta)}{\theta} \tag{22}$$

соответственно.

Основные трудности в этом параграфе связаны с ситуацией, когда количество возможных состояний системы очень велико или бесконечно. В этом случае оценки (21) и (22) становятся неэффективными.

Для получения оценок устойчивости среднего здесь приходится использовать специальные перенормировки.

Перепишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{B}\,(t)\,\mathbf{p} + \mathbf{f}(t) + \hat{B}\,(t)\,\mathbf{p}. \tag{23}$$

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = \bar{V}(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{V}(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \bar{V}(t,\tau)\ \hat{B}(\tau)\mathbf{p}(\tau)\,d\tau \tag{24}$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{V}(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{V}(t,\tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau)\,d\tau. \tag{25}$$

А тогда в *любой* норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \int_0^t \|\bar{V}(t,\tau)\| \left(\|\hat{B}(\tau)\|\|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{f}}(\tau)\|\right)\,d\tau. \tag{26}$$

Будем теперь дополнительно предполагать, что существуют числа $K,\ N$ такие, что

$$\xi(t) \leq K < \infty, \quad \sup_i |a_{ii}(t)| \leq K \text{ почти при всех } t \geq 0, \tag{27}$$

$$a_{i+k,i}(t) = 0 \text{ при всех } k \geq N \text{ и почти при всех } t \geq 0. \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а также (27) и (28). Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел* $\{d_i\}$ *такая, что a)* $\inf_{k\ge 1}\frac{d_k}{k} = w > 0$*, b)* $\sup_k \frac{d_{k+1}}{d_k} = m < \infty$*, c)* $b - \left(m^N - 1\right)K > 0$*. Тогда при любых начальных условиях* $\mathbf{p}(0)$ *и* $\bar{\mathbf{p}}(0)$ *справедлива следующая оценка устойчивости среднего:*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \le \frac{\varepsilon\,(b+K)}{w\,(b-(m^N-1)\,K)\,(b-(m^N-1)\,K - m^N\varepsilon)}. \quad (29)$$

Доказательство.

Положим $d_0 = 1$. Рассмотрим диагональную матрицу

$$D = diag\,(d_0, d_1, d_2, \dots) \quad (30)$$

и соответствующее пространство последовательностей $l_{1D} = \left\{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)^T\right\}$ таких, что $\|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$. Тогда имеем $w\|\mathbf{z}\|_{1E} = w\sum_k k|p_k| \le \|\mathbf{z}\|_{1D}$.

Оценим теперь логарифмическую норму $\gamma(B(t))_{1D}$:

$$\gamma(B(t))_{1D} = \gamma(DB(t)D^{-1})_1 = \max\Bigg(a_{00}(t) - \xi(t) + \sum_{i\ge 1}\frac{d_i}{d_0}a_{i0}(t),$$
$$\sup_{i\ge 1}\left(a_{ii}(t) - \xi_i(t) + \frac{d_0}{d_i}\left(a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t)\right) + \sum_{j\ne i, j\ge 1}\frac{d_j}{d_i}a_{ji}(t)\right)\Bigg) \le \quad (31)$$
$$-\xi(t) + \left(m^N - 1\right)\sup_i |a_{ii}(t)| \le -b + \left(m^N - 1\right)K.$$

Далее

$$\|\hat{B}(t)\|_{1D} = \|D\hat{B}(t)D^{-1}\|_1 \le m^N\varepsilon. \quad (32)$$

А тогда

$$\gamma(\bar{B}(t))_{1D} \le \gamma(B(t))_{1D} + \|\hat{B}(t)\|_{1D} \le -b + \left(m^N - 1\right)K + m^N\varepsilon. \quad (33)$$

Оценим теперь

$$\|\mathbf{p}(t)\|_{1D} \le \|V(t)\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \int_0^t \|V(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)\,d\tau\|_{1D} \le$$
$$\le e^{-\left(b-\left(m^N-1\right)K\right)t}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{K}{b-(m^N-1)\,K}. \quad (34)$$

Легко видеть, что $\|\hat{\mathbf{f}}(t)\| \leq \varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$.

Тогда с учетом (26) имеем

$$\|\mathbf{p}(t)-\bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} \leq \int_0^t e^{-\left(b-\left(m^N-1\right)K-m^N\varepsilon\right)(t-\tau)} \times$$
$$\left(m^N\varepsilon\left(e^{-\left(b-\left(m^N-1\right)K\right)\tau}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D}+\frac{K}{b-\left(m^N-1\right)K}\right)+\varepsilon\right)d\tau \leq \tag{35}$$
$$\mathrm{o}\,(1)+\frac{\varepsilon\left(1+\frac{Km^N}{b-(m^N-1)K}\right)}{b-\left(m^N-1\right)K-m^N\varepsilon}.$$

А тогда

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{p}(t)-\bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} \leq \frac{\varepsilon\,(b+K)}{\left(b-\left(m^N-1\right)K\right)\left(b-\left(m^N-1\right)K-m^N\varepsilon\right)}, \tag{36}$$

откуда и получаем требуемую оценку.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а также (27) и (28). Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{d_i\}$ такая, что a) $\inf_{k\geq 1}\frac{d_k}{k}=w>0$, b) $\sup_k \frac{d_{k+1}}{d_k}=m<\infty$, c) $\theta-\left(m^N-1\right)K>0$. Тогда при любых начальных условиях $\mathbf{p}(0)$ и $\bar{\mathbf{p}}(0)$ справедлива следующая оценка устойчивости среднего:*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|E_{\mathbf{p}}(t)-\bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\right| \leq \frac{\varepsilon e^{\theta}\left(\theta+K+Km^N\left(e^{\theta}-1\right)\right)}{w\left(\theta-\left(m^N-1\right)K\right)\left(\theta-\left(m^N-1\right)K-m^N\varepsilon\right)}. \tag{37}$$

4 Пример

Рассмотрим здесь простейшую систему обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований с катастрофами. Будем предполагать, что требования поступают группами не более трех одновременно с одинаковыми интенсивностями $a_{i+k,i}(t)=\lambda(t)=2+\sin 2\pi t,\ 1\leq k\leq 3$, одновременно обслуживается одно или два требования также с одинаковыми интенсивностями $a_{i-k,i}(t)=\mu(t)=1+\cos 2\pi t,\ 1\leq k\leq 2$, а интенсивность катастрофы при наличии k требований в системе есть $\xi_k(t) = 5 + \sin 2\pi k t + \cos 2\pi t, k \geq 1$. Тогда $\xi(t) = 4 + \cos 2\pi t$, $b = 3$, $\theta = 4$, $K = 13$. Положим $\varepsilon = 10^{-3}$. Тогда получаем следующие оценки устойчивости:

по теореме 1

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 0.333 \cdot 10^{-3}, \tag{38}$$

по теореме 2

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 1.25 \cdot 10^{-3}. \tag{39}$$

Далее, для получения оценок устойчивости среднего положим $d_i = 1.1^i$, имеем тогда $B = \sup_{t,i} \xi_i(t) = 7$, $\omega = 0.259$, $m = 1.1$.

Применяя подход теоремы 3 с учетом структуры инфинитизимальной матрицы процесса, получаем следующие оценки: по теореме 3

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\Big|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\Big| \leq 0.053, \tag{40}$$

по теореме 4

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\Big|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\Big| \leq 4.32. \tag{41}$$

Положим

$$\omega_n^1 = \sup_{k\geq n-2} \frac{1}{d_k}, \quad \omega_n^2 = \sup_{k\geq n-2} \frac{k}{d_k}. \tag{42}$$

Рассмотрим семейство «усеченных» процессов $X_n(t)$ с фазовыми пространствами $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, теми же интенсивностями при $k \leq n$ и матрицами интенсивностей $A_n(t)$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и $\xi_i(t) \leq B$, тогда*

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| \leq \frac{3(K+B)\omega_n^1 K t}{b - (m^N - 1)K}, \tag{43}$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - E_{\mathbf{p_n}}(t)| \leq \frac{9(K+B)\omega_n^2 K t}{b - (m^N - 1)K} \tag{44}$$

при всех $t \geq 0$, любом $n \geq N$ и начальных условиях $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0) = 0$.

Доказательство. Будем отождествлять векторы $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)^T$ и $(x_1, \dots, x_n)^T$. Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_n(t)\mathbf{p} + (A(t) - A_n(t))\,\mathbf{p}, \tag{45}$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p_n}}{dt} = A_n(t)\mathbf{p_n} \tag{46}$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_n(t) = U_n(t)\mathbf{p}(0) \tag{47}$$

при $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0)$ и

$$\mathbf{p}(t) = U_n\,(t)\,\mathbf{p}(0) + \int\limits_0^t U_n\,(t,\tau)\,(A(\tau) - A_n(\tau))\,\mathbf{p}(\tau)\,d\tau. \tag{48}$$

Тогда (в любой норме) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| = \left\|\int\limits_0^t U_n\,(t,\tau)\,(A(\tau) - A_n(\tau))\,\mathbf{p}(\tau)\,d\tau\right\|. \tag{49}$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_n = \begin{pmatrix} u^n_{00} & . & . & u^n_{0n} & 0 & 0 & \cdots \\ u^n_{10} & . & . & u^n_{1n} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \\ u^n_{n0} & . & . & u^n_{nn} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Тогда

$$(A - A_n)\,\mathbf{p} =$$

$$= (0, \dots, (p_{n-2} + p_{n-1} + p_n)\,\lambda(t) + (p_{n+2} + p_{n+3})\,\mu(t) - (\xi_{n+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t))\,p_{n+1}, \dots)^T$$

и, следовательно,

$$U_n\left(A-A_n\right)\mathbf{p}=\left(\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\\ \left(p_{n-2}+p_{n-1}+p_n\right)\lambda(t)+\left(p_{n+2}+p_{n+3}\right)\mu(t)-\left(\xi_{n+1}+2\mu(t)+3\lambda(t)\right)p_{n+1}\\ \left(p_{n-1}+p_n+p_{n+1}\right)\lambda(t)+\left(p_{n+3}+p_{n+4}\right)\mu(t)-\left(\xi_{n+2}+2\mu(t)+3\lambda(t)\right)p_{n+2}\\ \vdots\end{array}\right). \quad (51)$$

$$\|U_n\left(A-A_n\right)\mathbf{p}\| = \sum_{k\geq 0}\left|\left(p_{n+k}+p_{n+k-1}+p_{n+k-2}\right)\lambda(t)+\left(p_{n+k+2}+p_{n+k+3}\right)\mu(t)-\right.$$
$$\left.\left(\xi_{n+k+1}+2\mu(t)+3\lambda(t)\right)p_{n+k+1}\right| \leq \quad (52)$$
$$3\lambda(t)\sum_{k\geq -2}p_{n+k}+2\mu(t)\sum_{k\geq 1}p_{n+k}+(K+B)\sum_{k\geq 1}p_{n+k}\leq$$
$$3(K+B)\sum_{k\geq -2}p_{n+k}\leq 3(K+B)\omega_n^1\sum_{k\geq -2}d_{n+k}p_{n+k}\leq 3(K+B)\omega_n^1\|\mathbf{p}(t)\|_{1D}$$

и

$$\|U_n\left(A-A_n\right)\mathbf{p}\|_{1E} = \sum_{k\geq 0}\left|\left(p_{n+k}+p_{n+k-1}+p_{n+k-2}\right)\lambda(t)+\left(p_{n+k+2}+p_{n+k+3}\right)\mu(t)-\right.$$
$$\left.\left(\xi_{n+k+1}+2\mu(t)+3\lambda(t)\right)p_{n+k+1}\right|(n+k+1)\leq \quad (53)$$
$$(K+B)\sum_{k\geq n-2}(6k+3)\,p_k\leq 9(K+B)\omega_n^2\sum_{k\geq -2}d_{n+k}p_{n+k}\leq 9(K+B)\omega_n^2\|\mathbf{p}(t)\|_{1D}.$$

Отсюда и вытекают требуемые оценки.

С учетом оценок скорости сходимости получаем, что для построения с точностью ε предельных характеристик исходного процесса достаточно брать $t\geq 9$; а используя теорему 5, находим, что для достижения нужной точности усечения при $t\leq 10$ достаточно выбрать $n=285$.

Ниже приведены два рисунка. На первом из них приближенно (с точностью до 2ε) построена предельная характеристика $\bar{p}_0(t)$ – вероятность отсутствия требований в возмущенной системе обслуживания, а на втором (с той же точностью) – предельное число требований в возмущенной системе обслуживания $\bar{\phi}(t)$.

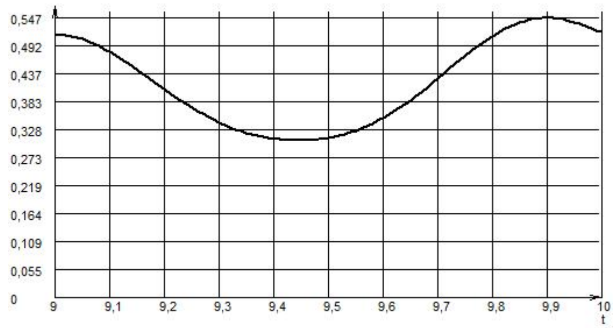

Рис. 1: Вероятность $Pr\left\{\bar{X}(t) = 0\right\}$

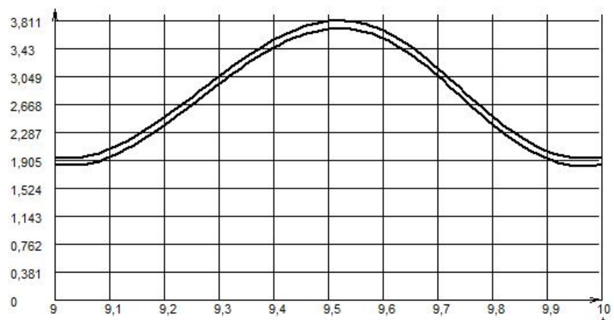

Рис. 2: Предельное среднее $\bar{\phi}(t)$

Список литературы

[1] *Андреев Д., Елесин М., Кузнецов А., Крылов Е., Зейфман А.* Эргодичность и устойчивость нестационарных систем обслуживания // Теория вероятностей и математическая статистика, 2003. Т. 68. С. 1–11.

[2] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347.

[3] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* A note on birth-death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett., 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.

[4] *Van Doorn E. A., Zeifman A. I., Panfilova T. L.* Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth-death processes // Th. Prob. Appl., 2010. Vol. 54. P. 97–113.

[5] *Dudin A., Nishimura S.* A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // J. Appl. Probab., 1999. Vol. 36. P. 868–881.

[6] *Dudin A., Karolik A.* BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Perform. Eval., 2001. Vol. 45. P. 19–32.

[7] *Dudin A., Semenova O.* Stable algorithm for stationary distribution calculation for a BMAP|SM|1 queueing system with markovian input of disasters // Journal of Applied Probability. 2004. Vol. 42. No. 2. P. 547–556.

[8] *Krishna Kumar B., Arivudainambi D.* Transient solution of an $M/M/1$ queue with catastrophes // Comput. Math. Appl., 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.

[9] *Mitrophanov A. Yu.* Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains // J. Appl. Prob., 2003. Vol. 40. P. 970–979.

[10] *Zeifman A. I.* Stability for contionuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math., 1985. Vol. 1155. P. 401–414.

[11] *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stoch. Proc. Appl., 1995. Vol. 59. P. 157–173.

[12] *Zeifman A.* Stability of birth and death processes // Journal of Mathematical Sciences, 1998. Vol. 91. P. 3023–3031.

[13] *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing Syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.

[14] *Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V.* Some bounds for $M(t)/M(t)/S$ queue with catastrophes // Proceedings of the 4th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools (Athens, Greece, October 20–24, 2008). – ACM digital library. DOI:10.4108/ICST.VALUETOOLS2008.4270

[15] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. – М.: Элекс-КМ, 2008.

[16] *Зейфман А. И., Сатин Я. А., Чегодаев А. В.* О нестационарных системах обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 47–54.

[17] *Зейфман А. И., Сатин Я. А., Коротышева А. В., Терешина Н. А.* О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 16–22.

[18] *Zeifman A., Satin Ya., Shorgin S., Bening V.* On $M_n(t)/M_n(t)/S$ queues with catastrophes // Proceedings of the 4th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools (Pisa, Italy October 19–23, 2009). – ACM digital library. DOI>10.4108/ICST.VALUETOOLS2009.7442

[19] *Зейфман А. И., Коротышева А. В., Сатин Я. А., Шоргин С. Я.* Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения, 2010. Т. 4. Вып. 3. С. 9–15.