Об одном классе марковских систем обслуживания*

Я. А. Сатин[†], А. И. Зейфман[‡], А. В. Коротышева[§], С. Я. Шоргин[¶]

Аннотация: Рассматриваются модели обслуживания, описываемые конечными марковскими цепями с непрерывным временем. При этом предполагается, что интенсивности поступления и обслуживания требований не зависят от числа требований в системе. Получены оценки скорости сходимости и устойчивости различных характеристик таких систем.

Ключевые слова: Нестационарные марковские системы обслуживания; скорость сходимости; устойчивость; оценки.

1 Введение

Классы систем массового обслуживания, описываемых процессами рождения и гибели (стационарными и нестационарными, с катастрофами) изучались, начиная с 70-х годов двадцатого века многими авторами (см., например, [2, 4, 5, 6, 7, 11]). С помощью методов, разработанных одним из авторов настоящей статьи (подробное изложение этих методов приведено в [3, 8, 15]), для таких систем удалось получить точные оценки скорости сходимости и устойчивости.

Оказывается, этот же подход можно применить и к существенно более общему классу систем обслуживания.

Рассмотрим систему массового обслуживания, число требований в которой описывается нестационарной марковской цепью с непрерывным временем и конечным пространством состояний, причем требования могут поступать и обслуживаться группами.

*Исследование поддержано РФФИ, гранты 11-07-00112-а и 11-01-12026-офи-м.

†Вологодский государственный педагогический университет, yacovi@mail.ru

‡Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики Российской академии наук, Институт социально-экономического развития территорий Российской академии наук, a_zeifman@mail.ru

§Вологодский государственный педагогический университет, a_korotysheva@mail.ru

¶Институт проблем информатики Российской академии наук, SShorgin@ipiran.ru

Пусть $X = X(t)$, $t \geq 0$, – число требований в системе обслуживания $(0 \leq X(t) \leq r)$.

Обозначим через $p_{ij}(s,t) = Pr\left\{X(t) = j\left|X(s) = i\right.\right\}$, $i, j \geq 0$, $0 \leq s \leq t$, переходные вероятности процесса $X = X(t)$, а через $p_i(t) = Pr\left\{X(t) = i\right\}$ – его вероятности состояний.

Будем предполагать, что интенсивности поступления и обслуживания k требований в момент t в системе обслуживания ($\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ соответственно) не зависят от числа требований, находящихся в системе в момент t, являются локально интегрируемыми на $[0,\infty)$ функциями времени t и, кроме того, $\lambda_{k+1}(t) \leq \lambda_k(t)$ и $\mu_{k+1}(t) \leq \mu_k(t)$ при всех k и почти при всех $t \geq 0$.

Тогда для описания вероятностной динамики процесса получаем прямую систему Колмогорова в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}(t), \tag{1}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \mu_4(t) & \cdots & \mu_r(t) \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \cdots & \mu_{r-1}(t) \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \mu 2(t) & \cdots & \mu_{r-2}(t) \\ \cdots & & & & & & \\ \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \lambda_{r-2}(t) & \cdots & \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{rr}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

причем $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^{i} \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{r-i} \lambda_{r-k}(t)$.

Далее будем обозначать через $\| \bullet \|$ l_1-норму, то есть $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$, а $\|B\| = \max_j \sum_i |b_{ij}|$, если $B = (b_{ij})_{i,j=0}^{r}$.

Тогда, в частности, имеем $\|A(t)\| \leq 2\sum_{k=1}^{r}(\lambda_k(t) + \mu_k(t))$ при всех $t \geq 0$.

Через $E(t,k) = E\left\{X(t)\left|X(0) = k\right.\right\}$ будем далее обозначать математическое ожидание процесса (среднее число требований) в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k, а через $E_{\mathbf{p}}(t)$ обозначим математическое ожидание процесса в момент t при начальном распределении вероятностей состояний $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$.

2 Оценки скорости сходимости

Рассмотрим вспомогательную последовательность положительных чисел $\{d_i\}$, $i = 1, \ldots, r$.

Положим

$$d = \min_{1\le i\le r} d_i, \quad G = \sum_{i=1}^{r} d_i, \quad W = \min_k \frac{d_k}{k}. \tag{3}$$

Рассмотрим величины

$$\alpha_i(t) = -a_{ii}(t) + \lambda_{r-i+1}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} - \sum_{k=1}^{r-i} (\lambda_k(t) - \lambda_{i+r-1}(t)) \frac{d_{k+i}}{d_i}, \tag{4}$$

и

$$\alpha(t) = \min_{1\le i\le r} \alpha_i(t). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что*

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, dt = +\infty. \tag{6}$$

Тогда $X(t)$ слабо эргодичен, при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$ и любых $s, t, \quad 0 \le s \le t$, справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \le \frac{8G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du}. \tag{7}$$

Кроме того, $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi(t)$ и при любых k и $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$|E(t,k) - \phi(t)| \le \frac{4G}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du}. \tag{8}$$

Доказательство.

Пользуясь предложенным в предыдущих работах способом, выразим $p_0 = 1 - \sum_{1\le i\le r} p_i$. Тогда получим неоднородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \tag{9}$$

где $\mathbf{f}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)^T$,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & \mu_1-\lambda_1 & \mu_2-\lambda_1 & \mu_3-\lambda_1 & \cdots & \cdots & \mu_{r-1}-\lambda_1 \\ \lambda_1-\lambda_2 & a_{22}-\lambda_2 & \mu_1-\lambda_2 & \mu_2-\lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-2}-\lambda_2 \\ \lambda_2-\lambda_3 & \lambda_1-\lambda_3 & a_{33}-\lambda_3 & \mu_1-\lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-3}-\lambda_3 \\ \cdots \\ \lambda_{r-1}-\lambda_r & \lambda_{r-2}-\lambda_r & \cdots & \cdots & \lambda_2-\lambda_r & \lambda_1-\lambda_r & a_{rr}-\lambda_r \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Рассмотрим треугольную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_r \end{pmatrix} \tag{11}$$

и соответствующую норму $\|\mathbf{z}\|_D = \|D\mathbf{z}\|_1$.

Тогда имеем

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_r & (\mu_1-\mu_2)\frac{d_1}{d_2} & (\mu_2-\mu_3)\frac{d_1}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-1}-\mu_r)\frac{d_1}{d_r} \\ (\lambda_1-\lambda_r)\frac{d_2}{d_1} & a_{22}-\lambda_{r-1} & (\mu_1-\mu_3)\frac{d_2}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-2}-\mu_r)\frac{d_2}{d_r} \\ (\lambda_2-\lambda_r)\frac{d_3}{d_1} & (\lambda_1-\lambda_{r-1})\frac{d_3}{d_2} & a_{33}-\lambda_{r-2} & \cdots & (\mu_{r-3}-\mu_r)\frac{d_3}{d_r} \\ \cdots \\ (\lambda_{r-1}-\lambda_r)\frac{d_r}{d_1} & (\lambda_{r-2}-\lambda_{r-1})\frac{d_r}{d_2} & (\lambda_{r-3}-\lambda_{r-2})\frac{d_r}{d_3} & \cdots & a_{rr}-\lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора $B(t)$ (см., например, подробное рассмотрение в [3, 13, 15]), получаем

$$\gamma\left(B(t)\right)_{1D} = \gamma\left(DB(t)D^{-1}\right)_1 =$$
$$= \max\left(a_{ii}(t) - \lambda_{r-i+1}(t) + \sum_{k=1}^{i-1}(\mu_{i-k}(t)-\mu_i(t))\frac{d_k}{d_i} + \sum_{k=1}^{r-i}(\lambda_k(t)-\lambda_{i+r-1}(t))\frac{d_{k+i}}{d_i}\right) = \tag{13}$$
$$= -\min\alpha_i(t) = -\alpha(t).$$

Тогда

$$\|\mathbf{z}^*(t)-\mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \le e^{-\int_s^t \alpha(u)du}\|\mathbf{z}^*(s)-\mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \tag{14}$$

для всех $0 \le s \le t$ и любых начальных условий $\mathbf{z}^*(s), \mathbf{z}^{**}(s)$.

Теперь, учитывая оценки для сравнения норм (см., например,[15]), получаем

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \le 2\|\mathbf{z}^*(t)-\mathbf{z}^{**}(t)\| \le \frac{4}{d}\|\mathbf{z}^*(t)-\mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \le$$
$$\le \frac{4}{d}e^{-\int_s^t \alpha(u)du}\|\mathbf{z}^*(s)-\mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \le \frac{4G}{d}e^{-\int_s^t \alpha(u)du}\|\mathbf{z}^*(s)-\mathbf{z}^{**}(s)\| \le$$
$$\le \frac{4G}{d}e^{-\int_s^t \alpha(u)du}\|\mathbf{p}^*(s)-\mathbf{p}^{**}(s)\| \le \frac{8G}{d}e^{-\int_s^t \alpha(u)du} \tag{15}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$ и любых $s, t, \quad 0 \le s \le t$.

Из слабой эргодичности процесса с конечным пространством состояний вытекает существование предельного среднего, начальные условия для которого можно в общем случае выбрать произвольно. Для оценки средних воспользуемся неравенством, приведенным в параграфе 2.3 из [15]:

$$\|\mathbf{z}\|_{1D} = d_0\left|\sum_{i=1}^{\infty}p_i\right| + d_1\left|\sum_{i=2}^{\infty}p_i\right| + \ldots \ge W\sum_{k\ge1}k\left|\sum_{i\ge k}p_i\right| \ge \frac{W}{2}\sum_{k\ge1}k\left|p_k\right|. \tag{16}$$

Получаем теперь

$$|E(t,k)-\phi(t)| \le \frac{2}{W}\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \le$$
$$\frac{2}{W}e^{-\int_0^t \alpha(u)\,du}\|\mathbf{e}_k-\mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D} \le \frac{4G}{W}e^{-\int_0^t \alpha(u)\,du}, \tag{17}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. *Положим в условиях теоремы 1* $\beta(t) = \max_{1\le i\le r}\alpha_i(t)$. *Тогда, пользуясь внедиагональной неотрицательностью матрицы* $DB(t)D^{-1}$ *с помощью методики, описанной в [13, 15], получаем справедливость неравенства*

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \ge \frac{d}{8G}e^{-\int_s^t \beta(u)du} \tag{18}$$

при любых $s,t, \quad 0\le s\le t$ *и уже не при любых начальных условиях* $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$, *а таких, что* $D\left(\mathbf{p}^*(s)-\mathbf{p}^{**}(s)\right)\ge 0$. *Следовательно, оценки теоремы 1 будут заведомо иметь точный по времени порядок, если удастся выбрать вспомогательную последовательность* $\{d_i\}$ *так, что* $\alpha(t)=\beta(t)$, *то есть все* $\alpha_i(t)$ *одинаковы (не зависят от индекса* i*).*

Введем теперь в рассмотрение величины

$$\zeta_i(t) = -a_{ii}(t)+\lambda_{r-i+1}(t)+\sum_{k=1}^{i-1}(\mu_{i-k}(t)-\mu_i(t))\frac{d_k}{d_i}+\sum_{k=1}^{r-i}(\lambda_k(t)-\lambda_{i+r-1}(t))\frac{d_{k+i}}{d_i} \tag{19}$$

и

$$\chi(t) = \max_{1\le i\le r}\zeta_i(t). \tag{20}$$

Замечание 2. *В условиях теоремы 1 при любых начальных условиях* $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$ *и любых* $s,t, \quad 0\le s\le t$, *справедлива следующая двухсторонняя оценка скорости сходимости:*

$$\frac{d}{4G}e^{-\int_s^t \chi(u)du}\|\mathbf{p}^*(s)-\mathbf{p}^{**}(s)\| \le \|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \le \frac{4G}{d}e^{-\int_s^t \alpha(u)du}\|\mathbf{p}^*(s)-\mathbf{p}^{**}(s)\|. \tag{21}$$

Таким образом, можно оценить и сверху и снизу время вхождения системы обслуживания в предельный режим. Более подробно о получении нижних оценок см., например, в [9, 13].

Рассмотрим два частных случая теоремы.

Следствие 1. *Пусть при выполнении остальных условий теоремы 1 вместо (6) выполняется условие $\alpha(t) \geq \alpha > 0$ почти при всех $t \geq 0$. Тогда вместо (7) и (8) справедливы оценки*

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{8G}{d} e^{-\alpha(t-s)} \tag{22}$$

и

$$|E(t,k) - \phi(t)| \leq \frac{4G}{W} e^{-\alpha t}. \tag{23}$$

Положим $M_0 = \max_{|t-s|\leq 1} \int_s^t \alpha(u)du$, $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t)\,dt$, $M = e^{M_0+\alpha^*}$. С учетом неравенства $e^{-\int_s^t \alpha(u)du} \leq Me^{-\alpha^*(t-s)}$ получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть все $\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ 1-периодичны, а при выполнении остальных условий теоремы 1 вместо (6) выполняется условие $\alpha^* > 0$. Тогда предельный режим (скажем, $\mathbf{p}^*(t)$) и соответствующее ему предельное среднее $\phi^*(t)$ можно выбрать 1-периодическими, а вместо (7) и (8) справедливы оценки*

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq \frac{8GM}{d} e^{-\alpha^* t} \tag{24}$$

и, кроме того,

$$|E(t,k) - \phi^*(t)| \leq \frac{4GM}{W} e^{-\alpha^* t} \tag{25}$$

при любом k и $t \geq 0$.

3 Устойчивость

Рассмотрим также «возмущенный» процесс обслуживания $\bar{X} = \bar{X}(t)$, $t \geq 0$, в котором интенсивности поступления и обслуживания требований также не зависят от числа требований в системе, обозначая его соответствующие характеристики теми же буквами с чертой сверху. Для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть выполняется неравенство $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq \varepsilon$. Первые результаты для нестационарных цепей с непрерывным временем получены в [12], а детальное рассмотрение для более общего случая неравномерных оценок можно без труда провести так же, как это сделано в [1, 14].

Для получения требуемых равномерных оценок устойчивости необходима экспоненциальная эргодичность соответствующего процесса, то есть существование положительных констант N, a таких, что для правой части (7) справедливо неравенство

$$e^{-\int_s^t \alpha(u)du} \leq N e^{-a(t-s)}. \tag{26}$$

Оценка (26) заведомо имеет место, в частности, если выполнены условия одного из следствий предыдущего параграфа.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и (26). Тогда при любых начальных условиях* $\mathbf{p}(s)$ *и* $\bar{\mathbf{p}}(s)$ *для процессов* $X(t)$ *и* $\bar{X}(t)$ *соответственно справедливы следующие оценки устойчивости:*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln \frac{4GN}{d})}{a}, \tag{27}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln \frac{4GN}{d})}{a}. \tag{28}$$

Доказательство основано на подходе, введенном для стационарных процессов в [10] и описанном для нестационарной ситуации в [16]. Если при любых начальных условиях для исходного процесса справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq c e^{-b(t-s)}, \tag{29}$$

то, полагая

$$\beta(t,s) = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1, \sum v_i = 0} \|V(t,s)\mathbf{v}(t,s)\| = \frac{1}{2}\max_{i,j}\sum_k |p_{ik}(t,s) - p_{jk}(t,s)|, \tag{30}$$

где $V(t,s)$ – матрица Коши уравнения (1), получаем в итоге следующее неравенство:

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \left\{ \begin{array}{c} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, \quad 0 < t < b^{-1}\ln\frac{c}{2}, \\ b^{-1}(\ln\frac{c}{2} + 1 - \frac{c}{2}e^{-b(t-s)})\varepsilon + \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \quad t \geq b^{-1}\ln\frac{c}{2} \end{array} \right. \tag{31}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}(s)$ и $\bar{\mathbf{p}}(s)$. Из неравенств (7) и (26) вытекает, что $b = a$, $c = \frac{8GN}{d}$. Устремив $t \to \infty$ и взяв $s = 0$, получаем требуемые оценки.

Замечание 3. *В полученную оценку устойчивости для математического ожидания процесса в качестве множителя входит размерность r, поэтому иногда лучший результат удается получить при помощи другого подхода, описанного в работе [16].*

Положим $S = \max_{1\le i,j\le r} \frac{d_i}{d_j}$, и пусть числа K, L таковы, что

$$d_1\lambda_1(t) + (d_1+d_2)\lambda_2(t) + \ldots + (\sum_{1\le i\le r} d_i)\lambda_r(t) \le K,$$

а

$$d_1(\lambda_1(t)-\bar\lambda_1(t)) + (d_1+d_2)(\lambda_2(t)-\bar\lambda_2(t)) + \ldots + (\sum_{1\le i\le r} d_i)(\lambda_r(t)-\bar\lambda_r(t)) \le L\varepsilon$$

почти при всех $t \ge 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, при всех k и почти всех $t \ge 0$ $\lambda_k(t) < \infty$. Тогда при любых начальных условиях $\mathbf{p}(s)$ и $\bar{\mathbf{p}}(s)$ для процессов $X(t)$ и $\bar X(t)$ соответственно справедливо неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar E_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \le \frac{N\varepsilon\,(La + 2KNS)}{Wa\,(a-2\varepsilon S)}. \tag{32}$$

Доказательство. Перепишем исходную систему (9) для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar B(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t) + \Big(B(t) - \bar B(t)\Big)\,\mathbf{p}(t). \tag{33}$$

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = \bar U(t,0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar U(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \bar U(t,\tau)\ \Big(B(\tau) - \bar B(\tau)\Big)\,\mathbf{p}(\tau)\,d\tau \tag{34}$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar U(t,0)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar U(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)\,d\tau, \tag{35}$$

где $U(t,s)$ – матрица Коши для уравнения (9). В любой норме при одинаковых начальных условиях получаем следующую оценку:

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \le \int_0^t \|\bar U(t,\tau)\| \Big(\|B(\tau) - \bar B(\tau)\|\|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\mathbf{f}(\tau) - \bar{\mathbf{f}}(\tau)\|\Big)\ d\tau. \tag{36}$$

Имеем почти при всех $t \geq 0$:

$$\|B(t) - \bar{B}(t)\|_{1D} = \|D(B(t) - \bar{B}(t))D^{-1}\| \leq 2S\varepsilon, \tag{37}$$

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{1D} \leq d_1\lambda_1(t)+(d_1+d_2)\lambda_2(t)+\ldots+(\sum_{1\leq i\leq r} d_i)\lambda_r(t) \leq K, \quad \|\mathbf{f}(\tau)-\bar{\mathbf{f}}(\tau)\|_{1D} \leq L\varepsilon. \tag{38}$$

А тогда

$$\gamma(\bar{B}(t))_{1D} \leq \gamma(DB(t)D^{-1}) + \|B(t) - \bar{B}(t)\|_{1D} \leq -\alpha(t) + 2S\varepsilon. \tag{39}$$

Оценим теперь

$$\|\mathbf{p}(t)\|_{1D} \leq \|U(t)\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \int\limits_0^t \|U(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)\, d\tau\|_{1D} \leq$$
$$\leq Ne^{-at}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{KN}{a}. \tag{40}$$

Тогда с учетом (36) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} \leq N\int_0^t e^{-(a-2\varepsilon S)(t-\tau)} \left(2S\varepsilon(Ne^{-a\tau}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{KN}{a}) + L\varepsilon\right) d\tau \leq$$
$$\leq o(1) + \frac{N\varepsilon(L + \frac{2KNS}{a})}{a - 2\varepsilon S}. \tag{41}$$

4 Примеры

Пример 1.

Рассмотрим исходный процесс обслуживания с интенсивностями $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \lambda(t) = 3 + \sin 2\pi t$, $\mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu(t) = 2 + \cos 2\pi t$, $\lambda_4(t) = ... = \lambda_r(t) = \mu_3(t) = ... = \mu_r(t) = 0$. Выберем последовательность $d_k = h^k$, где $0.82 < h < 1$. Тогда имеем

$$d = h^r,\ G \leq \frac{h}{1-h},\ W = \frac{h^r}{r}.$$

Будем предполагать, что возмущенный процесс имеет такую же структуру матрицы интенсивностей, причем $|\lambda(t) - \bar{\lambda}(t)| \leq \varepsilon$ и $|\mu(t) - \bar{\mu}(t)| \leq \varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$. Отметим кстати, что при этом $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq 10\varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$. Рассмотрим дальнейшие оценки:

$$S = \frac{1}{h^2},\ K = 4 \cdot (3h + 2h^2 + h^3),\ L = 3h + 2h^2 + h^3,$$

$$\alpha(t) \geq \lambda(t)\left(3 - h - h^2 - h^3\right) - \mu(t)\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} - 2\right),$$

$$\alpha^* = 3\left(3 - h - h^2 - h^3\right) - 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} - 2\right),$$

$$M_0 \leq \int_0^1 |\alpha(t)|\,dt \leq 4\left(3 - h - h^2 - h^3\right) + 3\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} - 2\right),$$

$$M = e^{\alpha^* + M_0}.$$

Если, например, взять $h = 0.9$, то $\alpha^* = 0.992, M_0 = 3.281, M = 71.737$. Тогда получаем следующие оценки:
по следствию 2

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq \frac{8Me^{-\alpha^* t}}{h^{r-1}(1-h)}, \tag{42}$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi^*(t)| \leq \frac{4Mre^{-\alpha^* t}}{h^{r-1}(1-h)}. \tag{43}$$

по теореме 2 ($N = M, \quad a = \alpha^*$) с использованием оценок следствия 2

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln\frac{4M}{h^{r-1}(1-h)})}{\alpha^*}, \tag{44}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln\frac{4M}{h^{r-1}(1-h)})}{\alpha^*}. \tag{45}$$

по теореме 3 с использованием оценок следствия 2

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{rM\varepsilon(3h + 2h^2 + h^3)(\alpha^* h^2 + 8M)}{h^r \alpha^* (\alpha^* h^2 - 2\varepsilon)}. \tag{46}$$

Пример 2.

Рассмотрим процесс с интенсивностями $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = ... = \lambda_r(t) = \lambda(t) = 3 + \sin 2\pi t$, $\mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu(t) = 2 + \cos 2\pi t$, $\mu_3(t) = ... = \mu_r(t) = 0$.

Будем предполагать, что возмущенный процесс имеет такую же структуру матрицы интенсивностей, причем $|\lambda(t) - \bar{\lambda}(t)| \leq \varepsilon$ и $|\mu(t) - \bar{\mu}(t)| \leq \varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$. При этом будем иметь $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq 2r\varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$.

Выберем последовательность $d_k = 1$. Тогда

$$d = 1,\ G = r,\ W = \frac{1}{r},\ S = 1,\ K = \frac{4r(1+r)}{2},\ L = \frac{r(1+r)}{2},$$

$$\alpha(t) = \lambda(t),\ \alpha = 2,\ \alpha^* = 3, M_0 \leq 4,\ M \leq e^7.$$

И получаем следующие оценки:
по следствию 1

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 8re^{-2t}, \tag{47}$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi(t)| \leq 4r^2e^{-2t}, \tag{48}$$

по следствию 2

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq 8re^{7-3t}, \tag{49}$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi^*(t)| \leq 4r^2e^{7-3t}. \tag{50}$$

По теореме 2 ($N = 1, \quad a = \alpha$) с учетом оценок следствия 1

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln 4r)}{2}, \tag{51}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln 4r)}{2}, \tag{52}$$

по теореме 2 ($N = M, \quad a = \alpha^*$) с учетом оценок следствия 2

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(8 + \ln 4r)}{3}, \tag{53}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(8 + \ln 4r)}{3}. \tag{54}$$

По теореме 3 с учетом оценок следствия 1

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{5\varepsilon r^2(1 + r)}{4(1 - \varepsilon)}. \tag{55}$$

По теореме 3 с учетом оценок следствия 2

$$\limsup_{t\to\infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon e^7 r^2(1 + r)(3 + 8e^7)}{6(3 - 2\varepsilon)}. \tag{56}$$

Список литературы

[1] *Андреев Д., Елесин М., Кузнецов А., Крылов Е., Зейфман А.* Эргодичность и устойчивость нестационарных систем обслуживания // Теория вероятностей и математическая статистика, 2003. Т. 68. С. 1–11.

[2] *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969.

[3] *Van Doorn E. A., Zeifman A. I., Panfilova T. L.* Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth-death processes // Th. Prob. Appl., 2010. Vol. 54. P. 97–113.

[4] *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифф. уравнения, 1971. є7. С. 1696–1698.

[5] *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987.

[6] *Gnedenko B., Soloviev A.* On the conditions of the existence of final probabilities for a Markov process // Math. Operationsforsh. Stat., 1973. P. 379–390.

[7] *Gnedenko D. B.* On a generalization of Erlang formulae // Zastosow. Mat., 1971. Vol. 12. P. 239–242.

[8] *Granovsky B. L., Zeifman A. I.* The N-limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains // Appl. Stoch. Models in Business and Industry, 2000. Vol. 16. P. 235–248.

[9] *Granovsky B. L., Zeifman A. I.* On the lower bound of the spectrum of some mean-field models // Theory Prob. Appl., 2005. Vol. 49. P. 148–155.

[10] *Mitrophanov A. Yu.* Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains // J. Appl. Prob., 2003. Vol. 40. P. 970–979.

[11] *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Советское радио, 1971.

[12] *Zeifman A. I.* Stability for contionuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math., 1985. Vol. 1155. P. 401–414.

[13] *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stoch. Proc. Appl., 1995. Vol. 59. P. 157–173.

[14] *Zeifman A.* Stability of birth and death processes // Journal of Mathematical Sciences, 1998. Vol. 91. P. 3023–3031.

[15] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. – М.: Элекс-КМ, 2008.

[16] *Зейфман А. И., Коротышева А. В., Панфилова Т. Л., Шоргин С. Я.* Оценки устойчивости для некоторых систем обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения, 2011. Т. 5. Вып. 3. С. 21–27.

On a class of Markovian queues.

Keywords: Nonstationary Markovian queues; rate of convergence; stability; bounds.

We consider nonstationary continuous-time Markovian queueing models. We suppose that arrival and service rates do not depend on the length of the queue. The bounds of the rate of convergence and stability for some characteristics of such systems are obtained.